Vortrag am Musikwissenschatlichen Institut der Universtät Hamburg, 20.11.2004

Rhythmusanalyse mit gaußifizierten Onsets

Klaus Frieler

Universität Hamburg

Rhythmusanalyse: Teil eines Ganzen

- Die „Rhythmusanalyse mit gaussifizierten Onsets“ ist Teil des Dissertations-Projektes Mathematische Musikanalyse

- Das Projekt verfolgt vor allem 3 Ziele

1. Schaffung eines einheitlichen Rahmen- und Begriffswerks für die meisten Aspekte der mathematisch-algorithmischen Musikanalyse.

2. Exemplifizierung des Rahmenwerks an neuen und bekannten Beispielen aus der Forschung.

3. Rechner-Implementation einer musikanalytischen Toolbox.

MatMusAna: Mathematische Musikanalyse

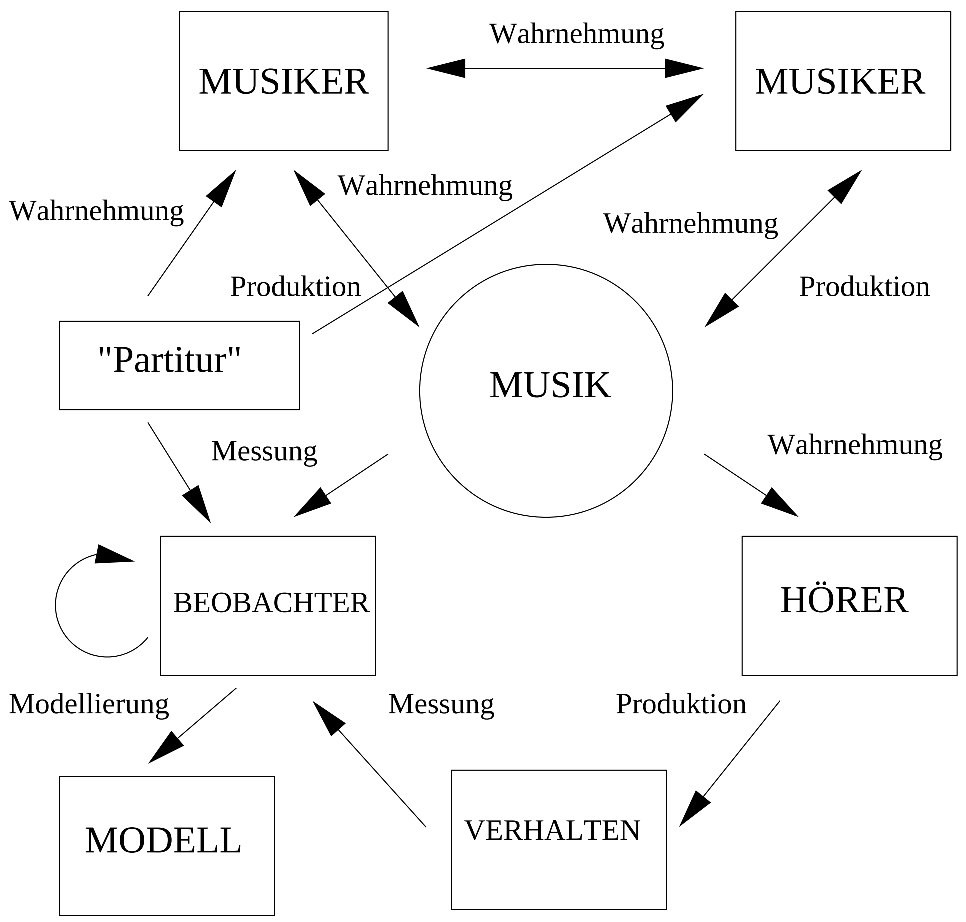
- In der Arbeit sollen folgende Bereiche abgedeckt werden
  - Tonsysteme: Vollständige Klassifikation (z.B. periodische und temperierte Tonsysteme), (Log-)Intervallmatrix, Konsonanzmaße...
  - Melodik: Melodieähnlichkeit, Segmentierung, Klassifikation melodischer Prototypen...
  - Rhythmik: Beat und Metrumsextraktion, rhythmische Ähnlichkeit, rhythmische Komplexität...
  - Harmonik: harmonische Ähnlichkeit, implizite Tonalität...
- Nicht behandelt werden Klangfarbenaspekte.

MatMusAna: Mathematische Musikanalyse

- Schwerpunkt liegt auf der Modellierung von Musikwahrnehmung, nicht so sehr auf inhärente, aber evtl nicht wahrnehmbare mathematische Strukturen in der Musik selbst (vgl. Mazzola-Schule).

- Eher ein physikalischer Ansatz: Die Theorie folgt dem Experiment.

MatMusAna: Messung und Theoriebildung



Rhythmusanalyse: Beat- und Metrumsextraktion

- Rhythmus ist elementare und definierende Dimension von Musik

- Ein großteil der bekannten Musik ist um einen impliziten oder expliziten Beat (= quasi-periodische Impulsfolge) herum organisiert.

- Gewöhnlich unterscheidet man verschiedene Ebenen auf verschiedenen Zeitskalen der rhythmischen Organisation.

  1. Tatum (Puls)

  2. Beat (Tactus)

  3. Metrum

  Das führt uns auf die Definition von Zeitgitter und metrischer Hierachie.

Definition 1 (Zeitgitter) *Sei $\Delta T > 0$ eine reelle, positive Konstante, die Zeitbasis. Dann heißt die Menge*

$$G_{\Delta T} = \{n\Delta T, n \in \mathbb{N}_0\}$$

ein Zeitgitter. Für $k < p \in \mathbb{N}_0$ ist das (k,p)-Untergitter von G die Menge

$$G_{\Delta T}(k,p) = \{(k+np)\Delta T, n \in \mathbb{N}\}$$

mit Phase k und Period p. Der Wert

$$\Theta = \frac{1}{m\Delta T}$$

heißt Tempo des (Unter-)gitters. Jede Teilmenge $\mathcal{R} \subset G_{\Delta T}$ eines Zeitgitters heißt regulärer Rhythmus.

Definition 2 (Metrische Hierarchie) *Sei $G_{\triangle T}$ ein Zeitgitter,*

$$M = \{m_i | m_i > 1, 1 \leq i \leq N\}$$

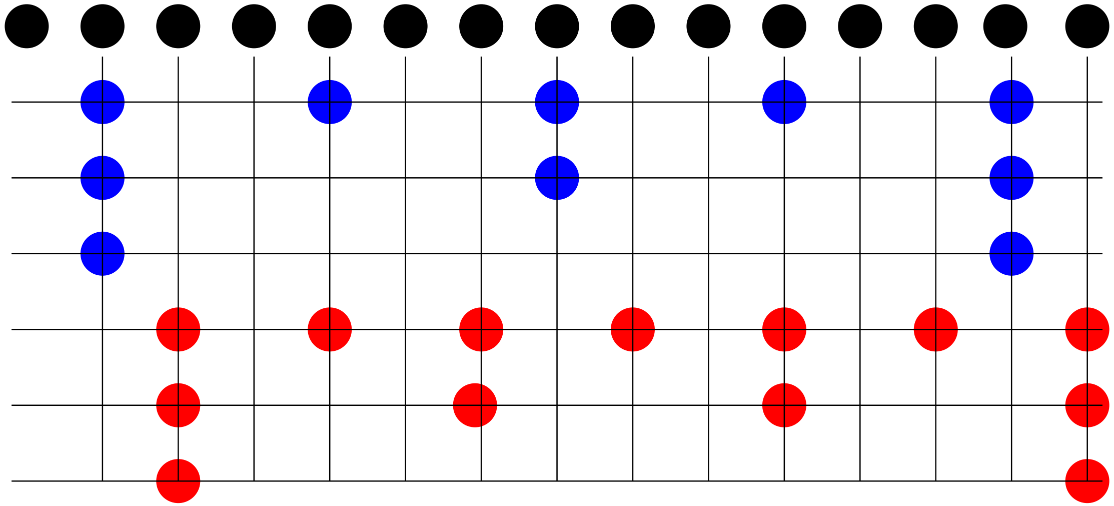
eine Menge natürlicher Zahlen. Definiere $p_n = \prod_{i=1}^{n} m_i$ und sei k eine natürliche Zahl. Das Untergitter $G_{\triangle T}(k, p_n) \equiv \Gamma(k, n)$ heißt Untergitter mit Level n und Phase k mod p_n.

Eine reguläre metrische Hierarchie zur Phase $k < p_N$ ist dann die Menge aller Untergitter zum Level $n \leq N$:

$$\mathcal{M}(k; p_1, p_2 \ldots p_N) = \{\Gamma(k, n), 1 \leq n \leq N\} \tag{1}$$

Beispiel: Metrische Hierarchien des 12/8-Taktes.

Schwarz	Zeitgitter $G_{\triangle T}$
Blau	$\mathcal{M}(1; 3, 6, 12)$
Rot	$\mathcal{M}(2; 2, 4, 12)$



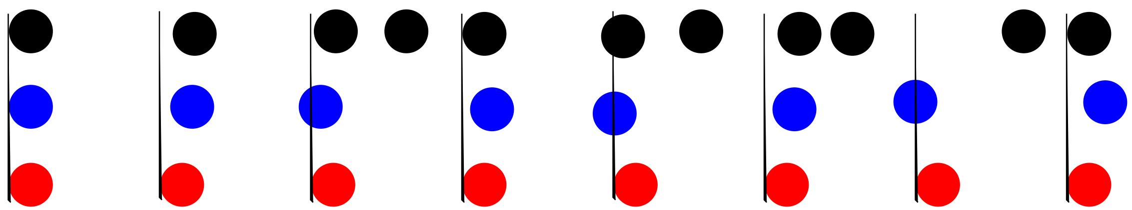
Problem 1 (Quantization) *Sei* $\mathcal{R} = \{t_i\}_{0 \leq i \leq N}$ *ein gemessener Rhythmus und* $\epsilon > 0$*. Die Aufgabe der Quantisierung ist es, eine Zeitkonstante* ΔT *und ein Satz von Quantisierungszahlen* $\{n_i \in \mathbb{N}_0\}$ *zu finden, so dass*

$$|(t_i - t_0) - n_i \Delta T| < \epsilon, \forall i \tag{2}$$

Die Abbildung $Q(t_i) = n_i \Delta T$ *heißt eine Quantisierung von* $\mathcal{R}$*.*

Es ist klar, dass diese Aufgabe nicht immer lösbar ist, entweder nicht zu gegebener Genauigkeit ϵ oder prinzipiell nicht (z.B. Accelerando)

Problem 2 (Beat- and Metrumextraktion) *Seien $\mathcal{R}$ die gemessenen Onsets einer rhythmischen Ausführung. Weiterhin nehmen wir an, dass eine Vpn. gebeten wurde gleichmäßig dazu mitzutappen und das die Onsets des Tappens gemessen wurden, bezeichnet mit $T(\mathcal{R})$. Die Aufgabe der Beatextraktion ist nun eine Quantisierung für $T(\mathcal{R})$ aus $\mathcal{R}$ herzuleiten. Falls die Vpn. darüberhinaus gebeten wurde, eine 'Eins' zu markieren, gemessen in einem weiteren Rhythmus $\mathcal{M}(\mathcal{R})$, dann ist das Problem der Metrumextraktion eine Quantisierung von $\mathcal{M}$ zu finden und deren relative Position zum extrahierten Beat.*



Schwarz: $\mathcal{R}$, Blau: $T(\mathcal{R})$, Rot: $Q(T(\mathcal{R}))$

Rhythmusanalyse: Metrische Hierarchie Algorithmus

- Sei $\mathcal{R} = \{t_i\}_{0 \leq i \leq N}$ ein gemessener Rhythmus, z.B. von einer MIDI-Einspielung

- Der Metrische Hierarchie Algorithmus (MHA):

1. Erstelle eine Gaußifikation $G(\mathcal{R})$
2. Berechne die Autokorrelationsfunktion A_G.
3. Bestimme die Maximumsstellen M von A_G
4. Bestimme Beatkandidaten T_i^B und Zeitbasen ΔT_j aus $M(A_G)$
5. Erstelle Liste möglicher Metren p_i mit Phasen φ_i und Gewichten w_i durch Kreuzkorrelation.

Definition 3 (Gaußifkation) *Sei $\mathcal{R} = \{t_i\}_{1 \leq i \leq N}$ eine Menge von Zeitpunkten (ein **Rhythmus**) und $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq N}$ eine Menge (reeller) Koeffizienten. Dann heißt*

$$g_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{i=1}^{N} \psi_i e^{-\frac{(t-t_i)^2}{2\sigma^2}}$$

eine Gaußifikation von T.

Eine Gaußifikation ist also eine Superposition von zeitverschobenen Gaußfunktionen und ähnelt den GMM (Gaussian Mixture Models), ist aber keine Wahrscheinlichkeitverteilung im engeren Sinne. Die exakten Onsets werden durch die Gaußfunktionen verschmiert und wir erhalten dadurch eine Funktion, die man differenzieren und integrieren kann. Statt den Gaußfunktionen sind auch andere Funktionen denkbar.

Rhythmusanalyse: Gaußifikation

- Die Koeffizienten ψ_i sind als Akzentgewichte gedacht.

- Akzente können aus verschiedenen musikalischen Dimensionen kommen (Dauern, Tonhöhen, Kontur, Lautstärke etc)

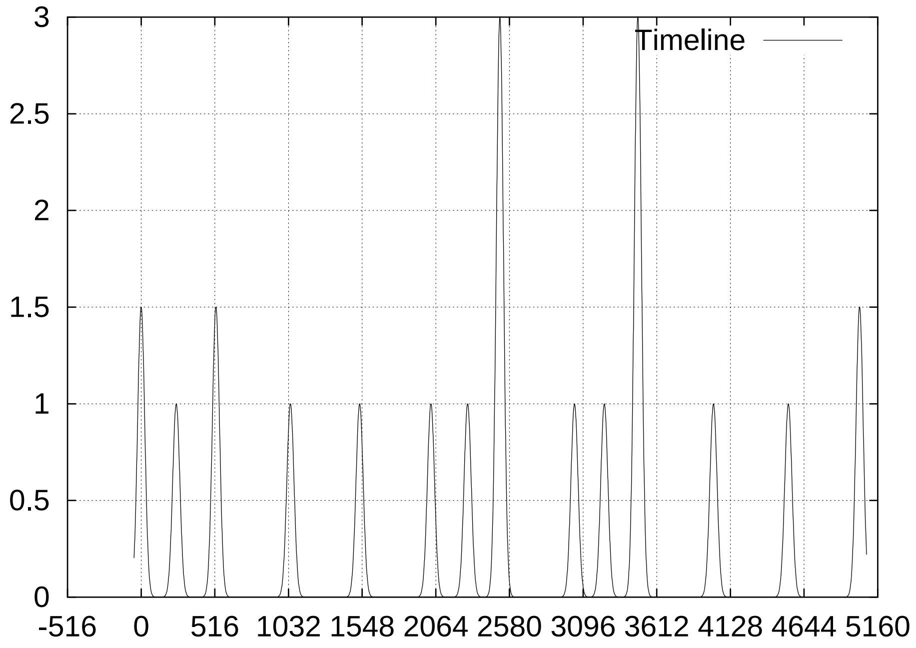
- Zunächst nur simple, temporale Akzentregeln (a_{MIN}, a_{MAJ} freie Parameter)

1. INITIALISIERUNG
   Setze $\psi_i = 1$, $\psi_1 = a_{MIN}$, $\psi_N = a_{MIN}$

2. SCHWACHER AKZENT
   Falls $(\Delta t_{i+1} - 2\sigma)/\Delta t_i > 1$ dann $\psi_i = a_{MIN}$

3. STARKER AKZENT
   Falls $(\Delta t_{i+1} + \sigma)/\Delta t_i > 2$ dann $\psi_i = a_{MAJ}$

- Beispiel für eine Gaußifikation. Das Luxemburgische Volkslied “Plauderei an der Linde“, mit 120bpm und Zeitrauschen von 50 ms.



Rhythmusanalyse: AKF der Gaußifi kation

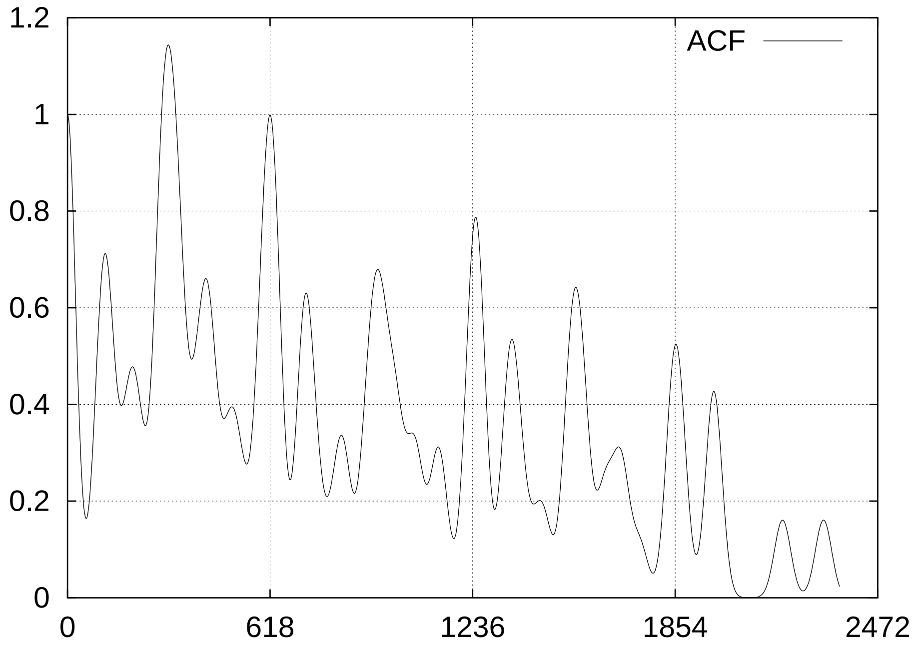
Proposition 1 *Sei $T_\tau : G(t) \to G(t+\tau)$ der Zeitverschiebungsoperator. Dann ist das zeitverschobene Skalarprodukt zweier Gaußfikationen G_1, G_2 die Kreuzkorrelationsfunktion $C_{G_1 G_2}$:*

$$\begin{aligned} C_{G_1 G_2}(\tau) &:= \langle G_1, T_\tau G_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \sum_{i,j=1}^{N_1,N_2} \psi_i \phi_j e^{-\frac{(\Delta t_{ij}^{12} - \tau)^2}{4\sigma^2}} \end{aligned}$$

mit $\Delta t_{ij}^{12} = t_i^{(1)} - t_j^{(2)}$.
Die Autokorrelationsfunktion $A_G(\tau)$ einer Gaußifikation G ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} A_G(\tau) &:= \langle G, T_\tau G \rangle \\ &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \sum_{i,j=1}^{N} \psi_i \psi_j e^{-\frac{(\Delta t_{ij}^{12} - \tau)^2}{4\sigma^2}} \end{aligned}$$

- Beispiel für die AKF einer Gaußifikation. MIDI-Einspielung der Gesangsmelodie von „Mit 66 Jahren“ von Udo Jürgens



Rhythmusanalyse: Bestimmung des Beatlevels

- Die AKF wird nur für einen Zeitspanne berechnet, die ungefähr der subjektiven Präsenzzeit entspricht (2-3s), freier Parameter des Modells.

- Beatlevel am stabilsten $\rightarrow$ wird zuerst bestimmt.

- Idee: Beatlevel ergibt Maximum der AKF im Bereich des spontanen (bevorzugten) Tempos.

- Tempopräferenzfunktion nach Parncutt:

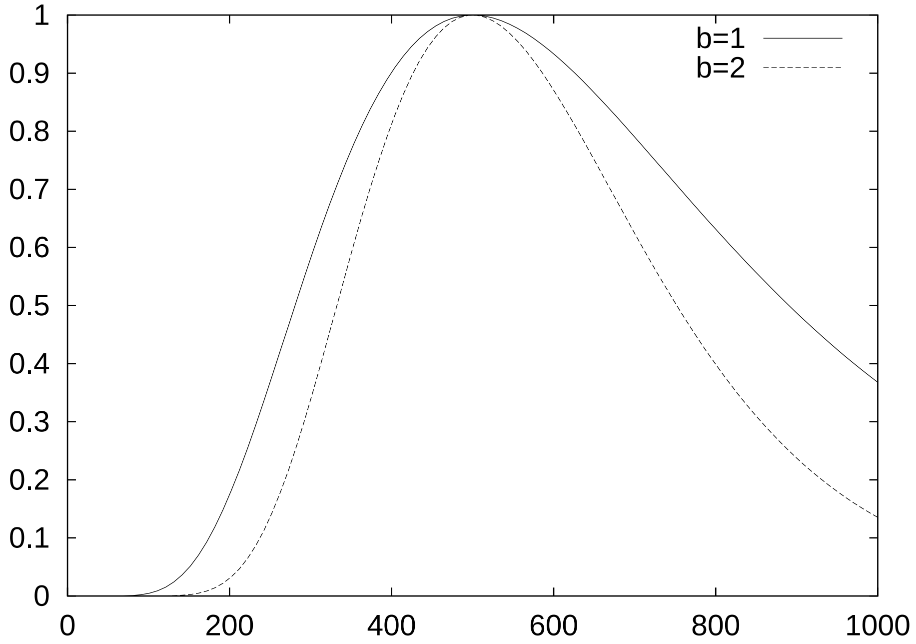
$$w(t) = e^{-\beta \log_2^2 \frac{t}{T_s}},$$

  T_s ist das spontanes Tempo. Freier Parameter des Modells, sollte um die 500 ms ($\hat{=}$ 120 bpm) sein. Es gilt $w(2T_s) = w(T_s/2)$

Rhythmusanalyse: Bestimmung des Beatlevels

- Die Kandidaten für den Tactus T_B werden wie folgt bestimmt

$$T_B = \{\arg\max A_G(t)w(t)\}$$



Tempopräferenzfunktionen zu verschiedenen Parametern β.

Rhythmusanalyse: Bestimmung von Metrum und Phase

- Für einen gegebenen Tactus können nun Metren und zugehörige Phasen bestimmt werden durch Kreuzkorrelation mit gaußifizierten 'idealen' metrischen Mustern.

Metrum	Relative Akzente
2	$\{2,0\}$
3	$\{2,0,0\}$
4	$\{2,0,1,0\}$

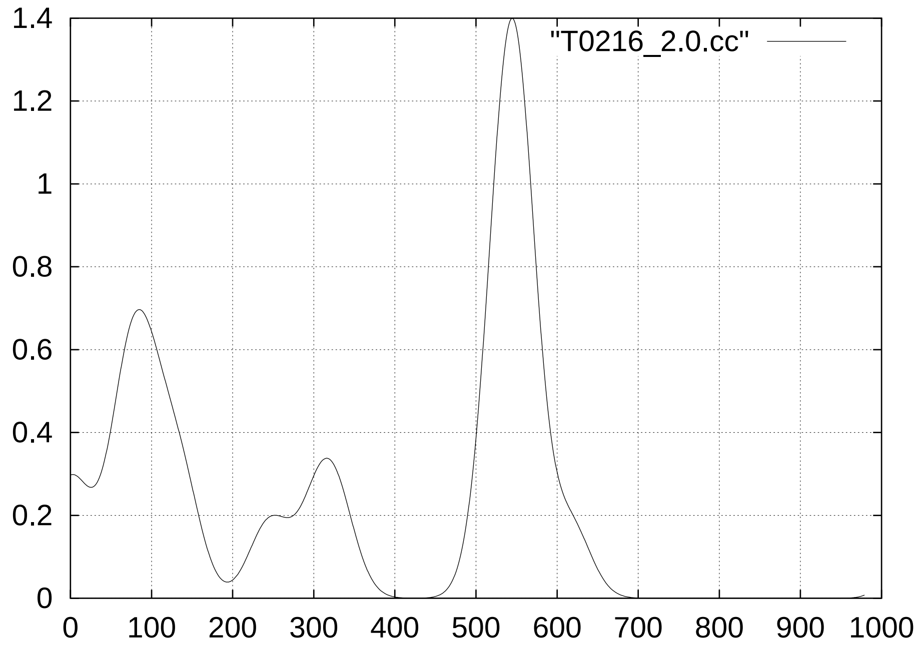
- Ist G_p die Gaußifikation eines metrischen Musters mit Periode p, dann sind der 'match'-Wert m_p und die beste Phase φ_p gegeben durch:

$$\begin{aligned} m_p &= \max C_{G_p G}(\tau) \\ \varphi_p &= \operatorname{argmax} C_{G_p G}(\tau) \end{aligned}$$

Rhythmusanalyse: Bestimmung von Metrum und Phase

- Das Gewicht dieses Metrum/Phasenpaars ist

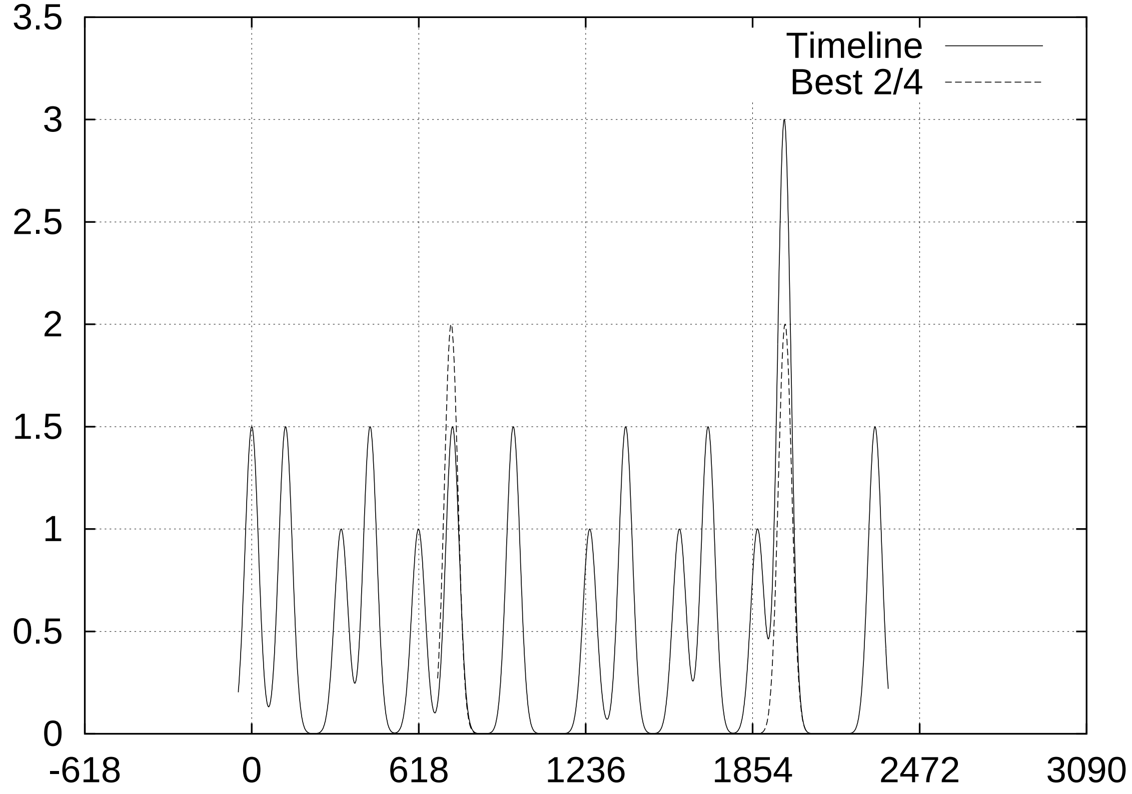
$$w_p = A_g(pT_B)m_p$$



Kreuzkorrelation C_{G_2G} (2/4) von 'Plauderei an der Linde'.

Rhythmusanalyse: Bestimmung von Metrum und Phase

- Beispiel: Das beste 2/4-Metrum für „Mit 66 Jahren“. Phase ist um einen halben Takt verschoben zur Notation → Typischer Fehler!



Rhythmusanalyse: MHA Evaluation

- Testset: 586 Luxemburgische Volkslieder, quantisiert, 120bpm.
- Vorkommende Metren 2,3,4, und 6.
- 80% der Lieder hatten Auftakt. Eher simple Rhythmik (synkopenfrei...)
- Getestet mit verschiedenen Akzentkonfigurationen.
- Trotz bester Bedingungen lag Tactusfehlerquote bei 12%! Oktav- und Quintfehler.

Rhythmusanalyse: MHA Evaluation

Benutzte Maße:

- c_{m1} : Korrekte Periode (%)
- c_{m2} : Korrekte Periode bis auf Vielfache (%)
- c_{m3} : Korrekte absolute Taktlänge (%)
- c_{φ} : Korrekte absolute absolute Phase (%)

(a_{min}, a_{maj})	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	c_{φ}	$\overline{c}$
(1,1)	0,41	0,78	0,48	0,32	0,50
(1,2)	0,46	0,82	0,55	0,62	0,61
(2,1)	0,43	0,80	0,50	0,27	0,50
(2,2)	0,45	0,81	0,55	0,50	0,58
(2,3)	0,47	0,80	0,58	0,64	0,62
(2,4)	0,44	0,77	0,57	0,64	0,61

Rhythmusanalyse: Ausblick

- Semigute erste Ergebnisse...
- Mehrere Beatkandidaten, mehrere Phasenkandidaten pro Metrum
- Fensterung, Polyrhythmie
- Erweiterte Akzentregeln aus anderen musikalischen Dimension
- Bessere Gewichtung durch Metrumspräferenzfunktion.
- Evaluation mit eingespielten MIDI-Daten.

Vielen Dank!

Klaus Frieler

Universität Hamburg