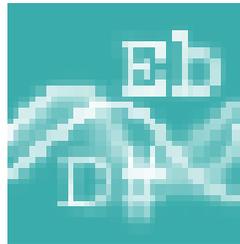


Symbole und Signale - MuWi UHH WS 04/05

Basiswissen Signalverarbeitung



Klaus Frieler

Universität Hamburg

Was ist ein Signal?

- Abstrakt: Ein Unterschied in der Umwelt (System) der einen Unterschied in einem System (Umwelt) bewirkt.
- Ein System kommuniziert mit seiner Umwelt über Signale. Signale tragen **Information**.
- Signale zumeist Funktionen der Zeit $x(t)$ oder des Raumes $s(x, y, z)$ oder beides $s(x, y, z, t)$ aufgefasst werden.
- Musik in diesem Sinne ist **zeit- und wertkontinuierliches (analoges) Signal**.
- Beispiel Gitarrenverstärker:
mechanisches Signal → elektrisches Signal → mechanisches Signal → akustisches Signal

Was ist ein Signal?

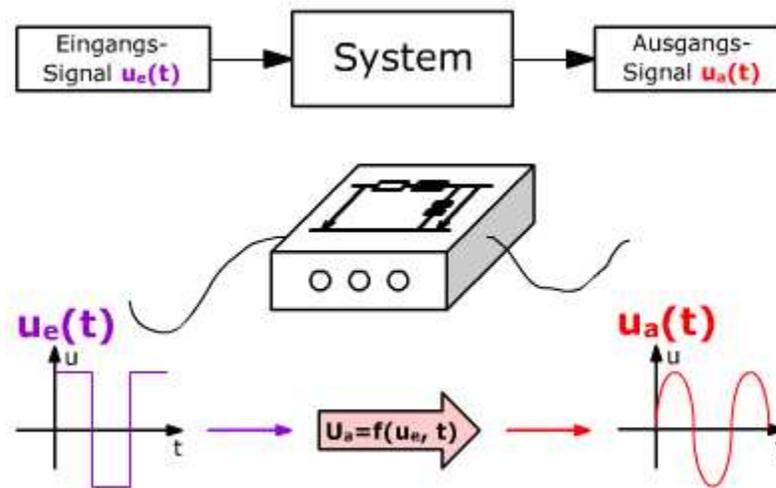
- Ein System transformiert ein Eingangssignal $x(t)$ in ein Ausgangssignal $y(t)$:

$$y(t) = H(x(t))$$

Der Operator H heißt Übertragungsfunktion.

Beispiel Gitarrenverstärker:

$$y_{Schall}(t) = H_{Lautsprecher}(H_{Verstärker}(H_{Kabel}(H_{Tonabnehmer}(x_{Saite}(t)))))$$



Was ist ein Signal?

- Ein System heißt **linear**, falls eine Summe von Eingangssignalen zu einer Summe der entsprechenden Ausgangssignale führt:

$$H(Ax_1(t) + Bx_2(t)) = AH(x_1(t)) + BH(x_2(t)) = Ay_1(t) + By_2(t)$$

- Ein System heißt **zeitinvariant**, wenn die Übertragungsfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h.

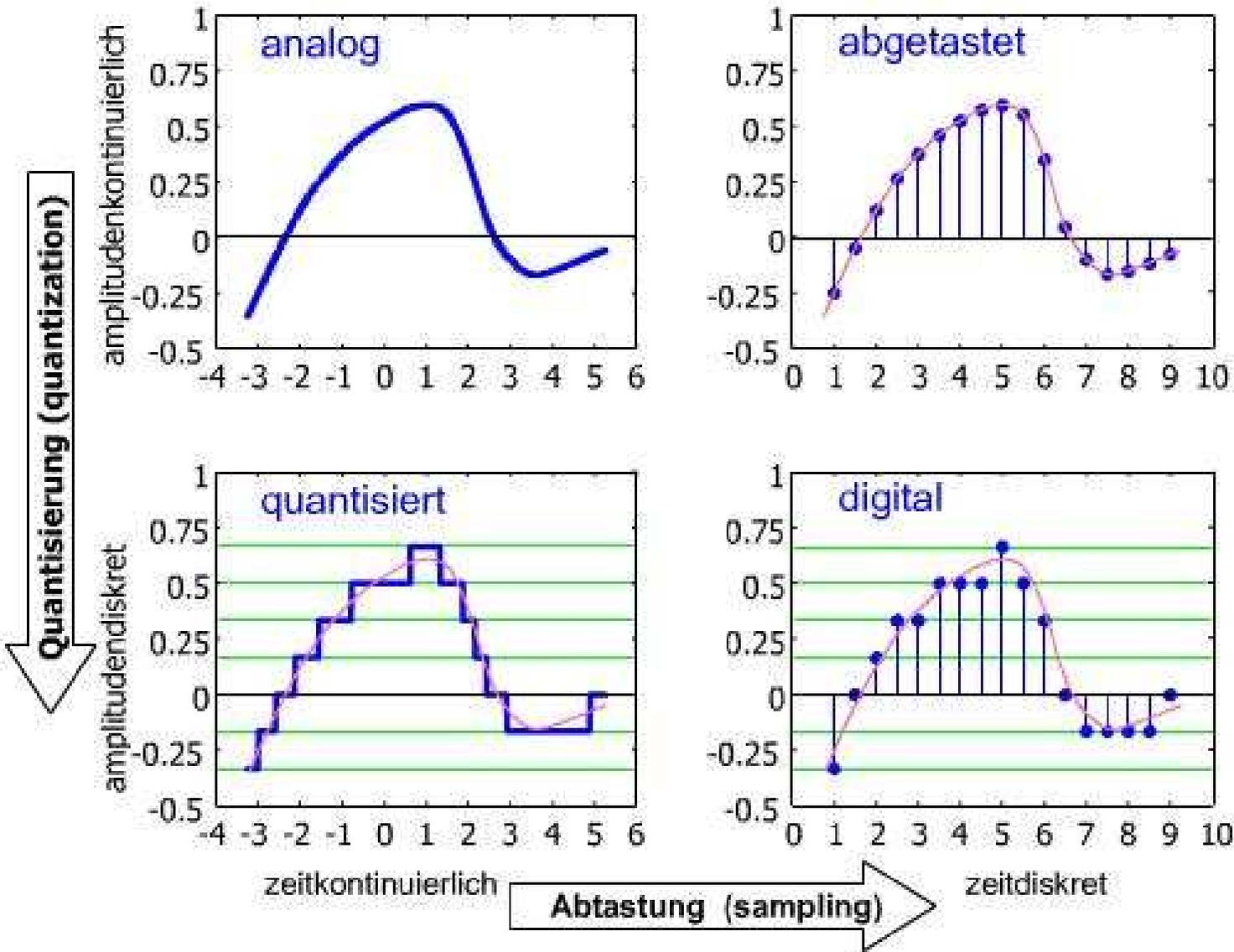
$$y(t - \tau) = H(x(t - \tau))$$

- Lineare, zeitinvariante (LTI-)Systeme von herausragender Bedeutung in der Signalverarbeitung/Systemtheorie → vollständig beschreibbar.

Was sind Signale?

- Man unterscheidet vier Sorten von Signalen nach Wertetyp:
 - analoge (zeit-, wertkontinuierlich)
 - abgetastete (zeitdiskret, wertkontinuierlich)
 - quantisierte (zeitkontinuierlich, wertdiskret)
 - digitale (zeit-, wertdiskret)
- Man unterscheidet zwei Sorten von Signalen nach Kausalität
 - Kausale Signale: $x(t) = 0$ für $t < 0$
 - Nichtkausale Signale: Sonst

Was sind Signale?



Grundlagen: Komplexe Zahlen

- Entstanden aus dem Wunsch $x^2 = -1$ zu lösen. Definition:

$$i^2 := -1$$

(Die Ingenieure benutzen meistens das Symbol j statt i)

- Lassen sich als Zahlenpaare $z = (x, y)$ darstellen, wobei die erste Komponente **Realteil** $\Re(z)$ und die zweite **Imaginärteil** $\Im(z)$ heißt.
- Schreibt man $z = x + iy = \Re(z) + i\Im(z)$ und unterscheidet man bei allen Rechnungen zwischen Real- und Imaginärteil so ergeben sich folgende Rechenregeln:

Grundlagen: Komplexe Zahlen

- Komplexe Konjugation

$$\bar{z} = x - iy$$

- Summe, Differenz

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$$

- Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

- Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

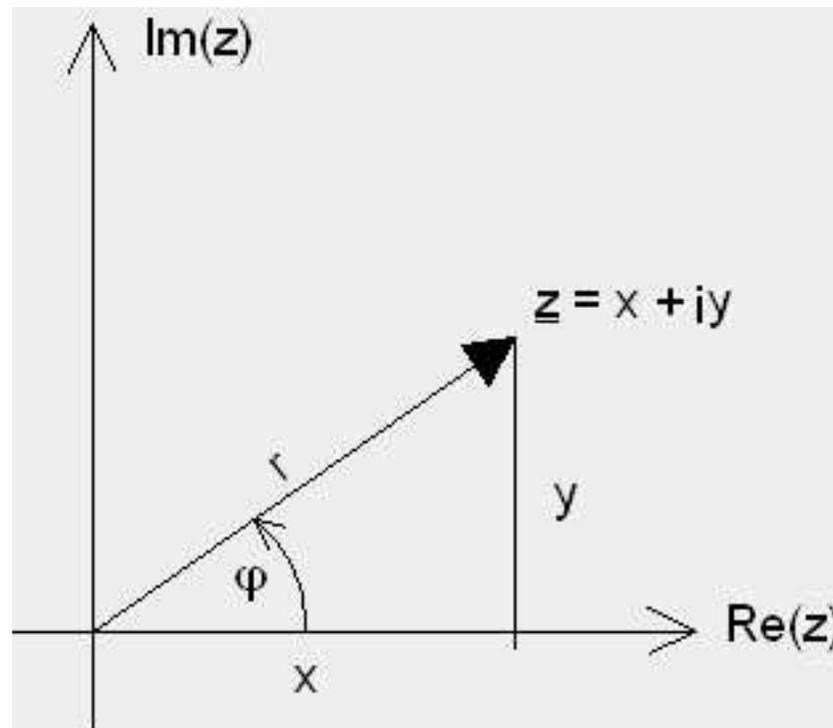
Grundlagen: Komplexe Zahlen

- **Polardarstellung:** Komplexe Zahlen als Punkte in der komplexen Ebene:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

mit

$$r = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{Länge}), \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arg(z) \quad (\text{Winkel})$$



Grundlagen: Komplexe Zahlen

- Vergleicht man die Reihendarstellungen („Taylorreihen“) der \sin , \cos und der Exponentialfunktion so ergibt sich die **Eulersche Formel**:

$$\cos \varphi = i^0 \frac{\varphi^0}{0!} + i^2 \frac{\varphi^2}{2!} + i^4 \frac{\varphi^4}{4!} + \dots$$

$$i \sin \varphi = i \frac{\varphi^1}{1!} + i^3 \frac{\varphi^3}{3!} + i^5 \frac{\varphi^5}{5!} + \dots$$

$$e^{i\varphi} = \frac{(i\varphi)^0}{0!} + \frac{(i\varphi)^1}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \dots$$

$$\hookrightarrow e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Grundlagen: Komplexe Zahlen

- Formeln daraus

$$r \cos \varphi = \Re(z) = \frac{r}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$r \sin \varphi = \Im(z) = \frac{r}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$e^{i2\pi n} = 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

- Man nennt

$$W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

auch die N-ten Einheitswurzeln.

Fourieranalyse: Fourierreihe

- Ist f eine periodische Funktion mit Periode T , d.h.

$$f(t + T) = f(t)$$

so kann man f als **Fourierreihe** schreiben. Diese gibt es in drei Versionen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \varphi_n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi int}{T}} \end{aligned}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi int}{T}} dt$$

Signalanalyse: Fourierreihen

- Zwischen den Koeffizienten herrschen die Beziehungen ($n > 1$):

$$a_n = A_n \sin \varphi_n$$

$$b_n = A_n \cos \varphi_n$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{-iA_n}{2} e^{i\varphi_n}$$

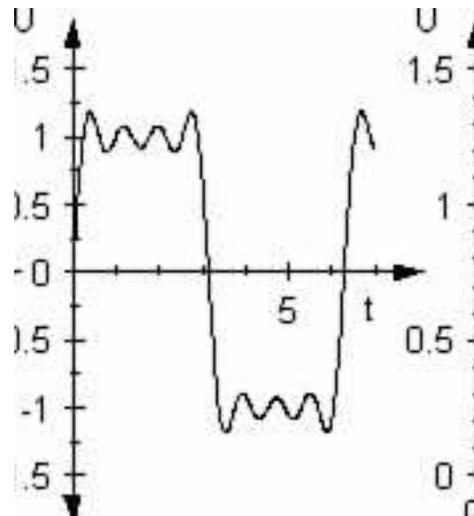
$$c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{iA_n}{2} e^{-i\varphi_n}$$

- Man kann also beliebige periodische Funktionen (und nur die!) als lineare Summe (additive Synthese) einfacher Sinus- und Cosinusschwingungen darstellen, wobei die Koeffizienten das **Spektrum** der Funktion angeben.

Signalanalyse: Fourierreihen

Beispiel: Rechteckschwingung ($T = 2\pi$)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



$$\begin{aligned} c_{2n} &= 0 \\ c_{2n+1} &= -\frac{2i}{(2n+1)\pi} \\ \Rightarrow \\ a_n &= 0 \\ b_{2n} &= 0 \\ b_{2n+1} &= \frac{4}{(2n+1)\pi} \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right)$$

Signalanalyse: Fouriertransformation

- Die Fouriertransformation ist ein wichtiges Hilfsmittel zur theoretischen Analyse linearer Systeme und Differentialgleichungen.
- Für beliebige (nicht-periodische) Signale kann man auch eine Frequenzzzerlegung finden als Verallgemeinerung der Fourierreihe. Die **Fouriertransformation** ist durch folgendes Integral definiert:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} \equiv F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ ist die Kreisfrequenz. Die FT ist eine komplexe Funktion! Verschiedene Normierungen möglich.

- $F(\omega)$ nennt man das Spektrum von f und enthält auch negative Frequenzen! Zusammenhängende Abschnitte auf der Frequenzachse heißen Frequenzbänder.

Signalanalyse: Fouriertransformation

- Kennt man das Spektrum $F(\omega)$, so kann man das Signal durch eine inverse Fouriertransformation wiedergewinnen:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- Beispiel: Gaußsignal. Ist

$$f_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

so erhält man nach etwas Rechnung

$$F_{\sigma}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

also wieder eine Gaußfunktion mit Breite $1/\omega$

- Frage: Was passiert wenn σ gegen Null strebt? (Antwort später.)

Signalanalyse: Fouriertransformation

- Einige Eigenschaften der Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\mathcal{F}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\}$$

wobei

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

die **Faltung** bezeichnet.

Signalanalyse: Fouriertransformation

- Einseitiges Leistungs (Power)-Spektrum (positive Frequenzen):

$$P(\omega) \propto |F(\omega)|^2 + |F(-\omega)|^2$$

- Leistung wird oft in dB gemessen:

$$dB(P) = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

P_0 ist die Bezugsgröße (beliebig), 3 dB entsprechend etwa einer Verdopplung der Leistung.

- In der Signalverarbeitung ist oft eine Verallgemeinerung der FT gebräuchlicher, die **Laplace-Transformation**

$$\mathcal{L}\{x(t)\} \equiv X(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{st} dt, \quad s = \sigma + i\omega \quad (\text{komplexe Frequenz})$$

Exkurs: Distributionen

- Distributionen sind **verallgemeinerte Funktionen**, sie lassen sich als Grenzwerte von Funktionen auffassen, die selbst keine Funktionen mehr sein müssen.
- Sie haben streng genommen nur Bedeutung “unterm Integral”.
- Wichtigste Distribution: Die **Diracsche δ -Funktion**. Für sie gilt

$$\int \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau) = \delta(\tau) * f(\tau), \quad (\text{Siebeigenschaft})$$

- Man kann sie sich z.B. als unendlich spitze Gaußkurve vorstellen, an einem Punkt unendlich, überall sonst 0.

Exkurs: Distributionen

- Die Bedeutung rührt vor allem aus der Tatsache, dass man mit der **Impulsantwort** (=Reaktion auf einen Dirac-Impuls) „alles“ über ein lineares und zeitinvariantes System weiß.
- Die Fouriertransformierte der δ -Funktion ist die konstante Funktion. (In einem Dirac-Impuls sind alle Frequenzen vertreten).

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = e^0 = 1$$

$$\mathcal{F}\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \delta(\omega)$$

- Sehr wichtig ist auch die **Sprungfunktion** (Heavysidefunktion):

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Vorteiler digitaler vs. analoger Signalverarbeitung:

- Garantierte Genauigkeit (definiert durch Samplingrate, Quantisierung etc.)
- Perfekte Reproduzierbarkeit von Signalverarbeitungsprozessen.
- Überlegene Performanz (Alles was mathematisch möglich, im Prinzip auch realisierbar)
- Effektivität (weniger Aufwand, geringere Kosten)

⇒ Wir brauchen A/D Wandlung: Sampling und Quantisierung.

Digitale Signale: Sampling

- Digitale Signale können aus analogen durch Abtasten (Sampling) und Quantisierung gewonnen werden (A/D-Wandlung)

- Durch Sampling mit der Periode T wird aus einem Signal $x(t)$ das Signal

$$x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT), \quad x(kT) \equiv x[k]$$

- Ist $X = \mathcal{F}\{x(t)\}$, dann lautet die Fouriertransformierte des gesampleten Signals:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

- Das gesamplete Spektrum ist periodisch im Frequenzbereich mit der Periode $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

Digitale Signale: Abtasttheorem

- Das Abtasttheorem (Shannon-Nyquist) besagt:
Ein gesampeltes Signal kann perfekt rekonstruiert werden, falls die Samplingrate ω_s mindesten doppelt so groß ist, wie die maximale im Signal vorhandene Frequenz ω_{max} .

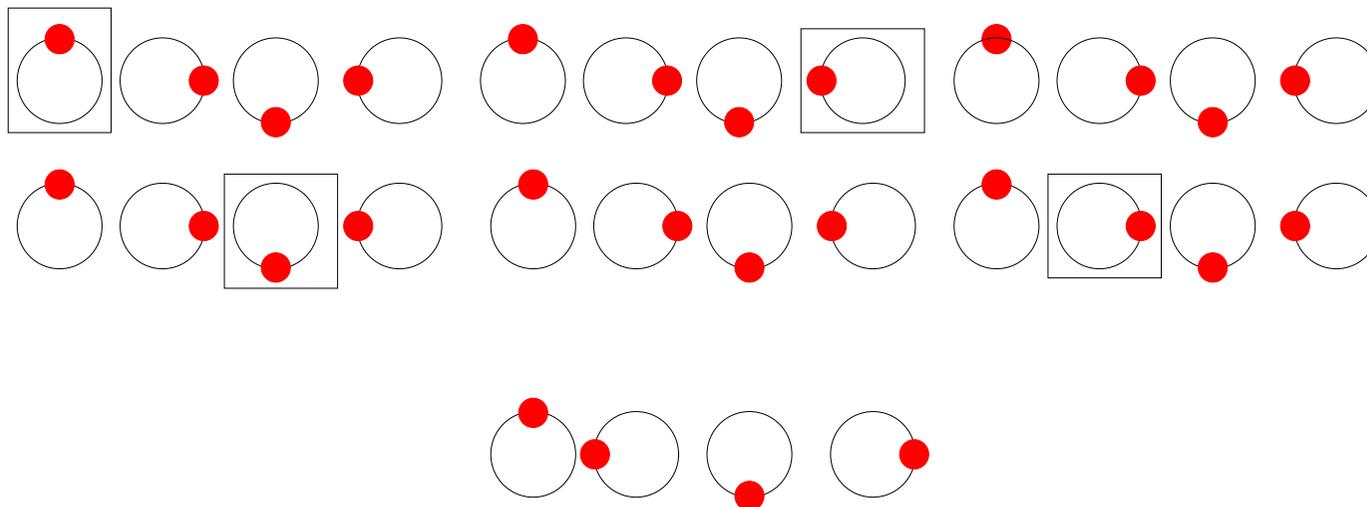
$$\omega_s \geq 2\omega_{max}$$

- Ist das nicht der Fall erscheinen Frequenzanteile $\omega > \omega_s$ im Spektrum an der Stellen $|\omega - \omega_s|$. Das nennt man **Aliasing**.
- Das liegt formal daran, dass das Spektrum des gesampleten Signals aus der periodischen Fortsetzung und Überlappung des Bereichs $[-\omega_s/2, +\omega_s/2]$ besteht.

Digitale Signale: Abtasttheorem

- Beispiel: Autoräder im Film. Ab einer bestimmten Geschwindigkeit scheinen die Räder erst stillzustehen und dann sich in die entgegengesetzte Richtung mit deutlich langsamerer Geschwindigkeit zu bewegen.

Der rote Punkt dreht sich mit einer Periode $T = 4$ rechts herum, wir sampeln mit $T_s = 7$ (Rechtecke). → Scheinbare Bewegung mit Periode $T_{eff} = 28$ links herum.

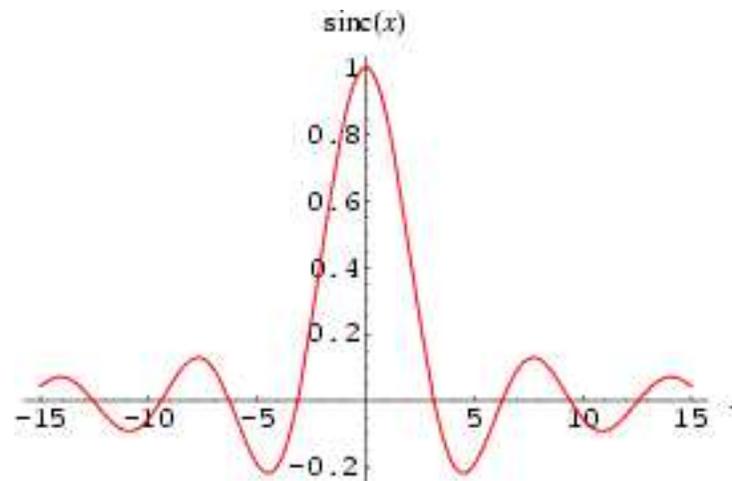


Digitale Signale: Rekonstruktion

- Ist das Samplingtheorem erfüllt, erhält man das Signal mit

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}(t - kT)\right)$$

zurück. ($\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$)



Digitale Signale: Aliasing

- Aufgrund von omnipräsentem Rauschen ist Aliasing nie ganz zu vermeiden.
- Antialiasing: Vor (oder nach) dem Samplen wird tiefpassgefiltert mit oberer Grenzfrequenz $f_s/2$.
- Das menschliche Ohr hört bis ungefähr 20kHz. → z .B. CD-Samplingrate 44,1 kHz. ($2 \cdot 20 \text{ kHz} + 10\%$)
- Weitere Verzerrungseffekt dadurch, dass ideales Sampling mit Diracimpulsen in der Realität nicht möglich ist. (Sample&Hold)

Digitale Signale: Quantisierung

- Den analogen Samplewerten werden diskreten Stufenwerte zugeordnet. (Abschneiden, runden)
- Für Audio ist 16bit meistens hinreichend. Beim Mastern werden manchmal 24bit verwendet um Fehlerfortpflanzungen zu minimieren. Intern wird oft mit Gleitkommazahlen gerechnet.
- n Bits $\rightarrow 2^n$ Quantisierungsstufen. 16bit $\doteq 2^{16} = 65536$ Stufen.
- Die Differenz zwischen dem analogem Wert und dem Quantisierungswert ist der Quantisierungsfehler \rightarrow Quantisierungsrauschen.
- Z.B: Clipping: Pegel zu hoch, Quantisierung schneidet Signal oben ab.

Digitale Signale: Diskrete Fouriertransformation

- Gesamte FT:

$$X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_s)e^{-im\omega T_s}$$

- Zur praktischen, rechnergestützten Analyse ist die FT aufgrund der Integrale und den unendlichen Grenzen schlecht geeignet.
- In der Praxis hat man kausale, zeitbeschränkte Signale, d.h. $0 \leq m < N$.

$$X(\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_s)e^{-im\omega T_s}$$

- Spektrum periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{T_s}$. Idee: Diskretisierung der Frequenzwerte.

Digitale Signale: Diskrete Fouriertransformation

- Man unterteilt man die Periode in N Punkte und erhält die Frequenzen $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_s N}$, $0 \leq k < N$. Das definiert die **Diskrete Fouriertransformation (DFT)**

$$X(\omega_k) \equiv X[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-i \frac{2\pi m k}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_N^{-mk}$$

- Analog zur inversen FT gibt es eine Umkehrformel (IDFT):

$$x[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i \frac{2\pi m k}{N}}, \quad 0 \leq m < N$$

- Die DFT besitzt ähnliche Eigenschaften wie die FT und nähert die FT an.
- Parsevals Formel: $\sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$

Digitale Signale: Fast Fourier Transformationen

- Es gibt viele FFT-Verfahren zur schnellen Berechnung von DFT's.
- Am verbreitetsten ist die Radix-2 Cooley-Tukey FFT, die angewandt werden kann falls N eine Potenz von 2 ist $N = 2^k$.
- Statt Ordnung $O(N^2)$ wie die naive Berechnung, hat dieser FFT- Algorithmus Ordnung $O(N \log N)$.
- Bei $N = 1024$ macht das einen Unterschied von ca 1 Mio. zu ca 10.000 Rechenoperationen. Faktor 100!
- Die Idee ist, dass aufgrund der Symmetrien der Einheitswurzeln, eine DFT der Länge N in zwei DFT's der Länge $N/2$ aufgespalten werden kann, jeweils zu geraden und ungeraden Indizes.

Digitale Signale: Kurzzeit-Fouriertransformation

- Signale bearbeitet man oft auf der Basis von **Frames**.
- Durch die DFT entstehen an den den Rändern der Frames Fehler im Spektrum (spectral blurring).
- Zur Minimierung der Fehler und für bessere Näherungen multipliziert man die Samples mit einer Fensterfunktion $w[k]$. So erhält man die (diskrete) Kurzzeit-Fouriertransformation ((D)STFT)

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]w[m]e^{-i\frac{2\pi mk}{N}}$$

Digitale Signale: Fensterfunktionen

- Nichtleistungserhaltende Fenster (auf dem Interval $[-1, 1]$)

- Rechteckfenster:

$$w(t) = 1$$

- Dreieck- oder Bartlettfenster:

$$w(t) = 1 - |t|$$

- Hamming/Hanningfenster:

$$w(t) = a + (1 - a) \cos(t),$$

Hanning: $a = 1/2$, Hamming: $a = 0.54$

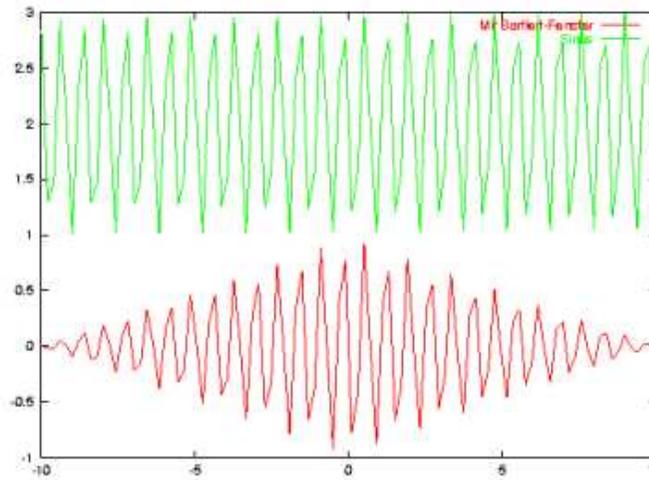
- Blackman/Blackman Harris Fenster:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) + a_3 \cos(3t), \quad \sum a_i = 1$$

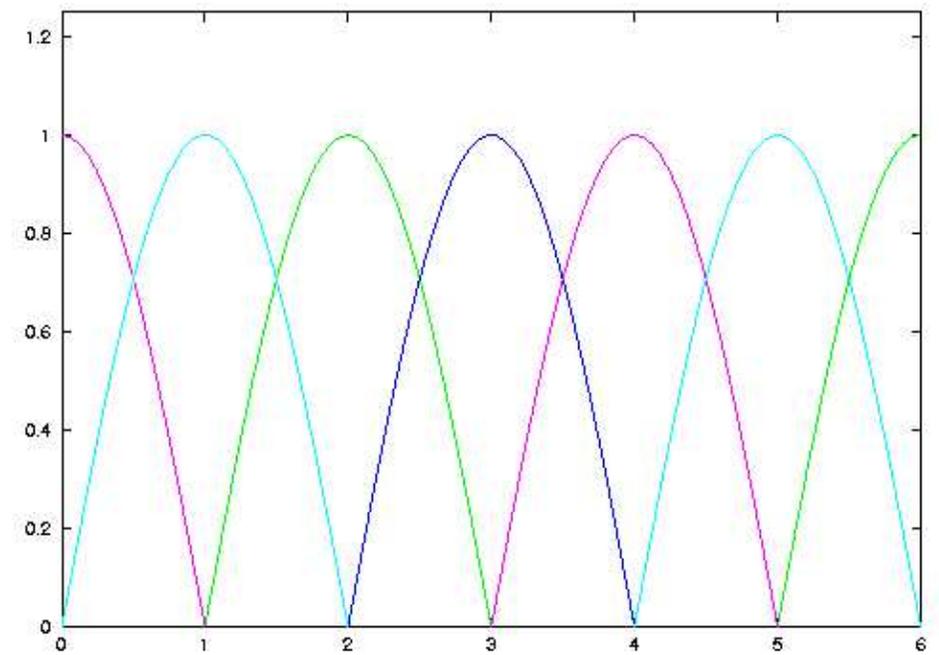
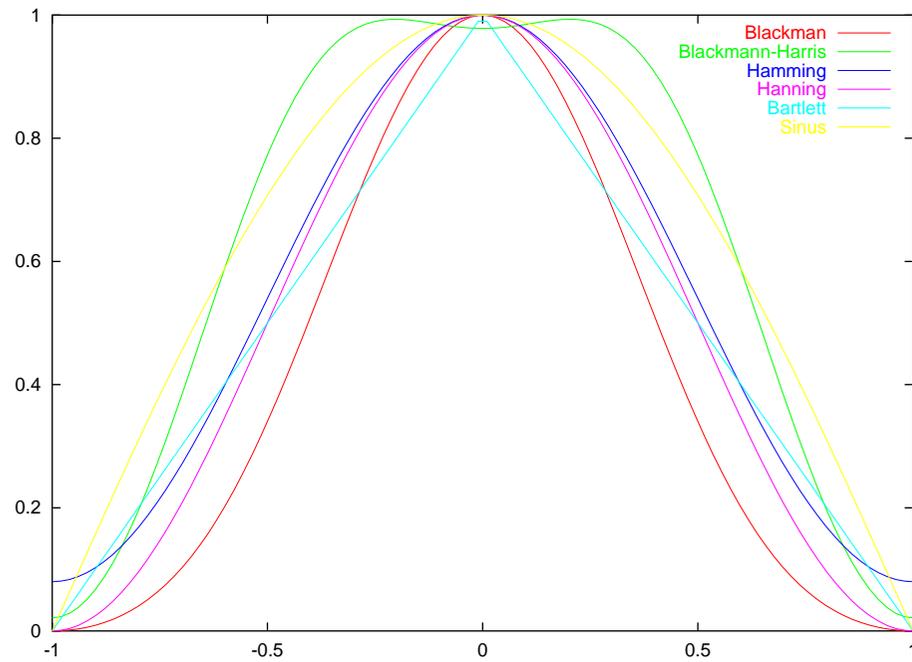
Digitale Signale: Fensterfunktionen

- Leistungserhaltende Fenster (auf dem Interval $[-1, 1]$)
 - Sinus Fenster: $f(t) = \sin(\pi \frac{t+1}{2})$
 - Kaiser-Fenster, abgeleitetes Kaiser-Bessel-Fenster (KBD)

$$f(t) = \frac{I_0(\pi\alpha\sqrt{1 - (2t - 1)^2})}{I_0(\pi\alpha)}$$

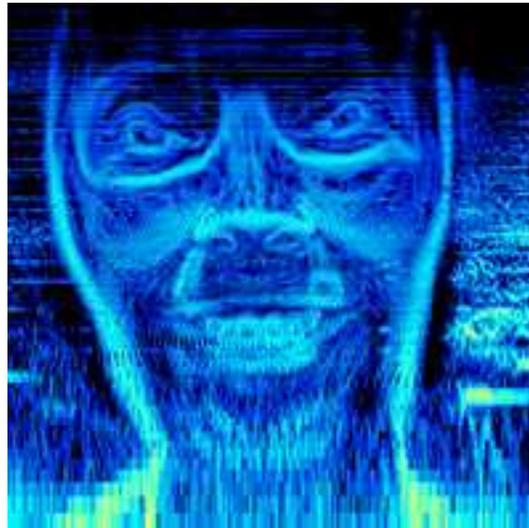


Digitale Signale: Fensterfunktionen

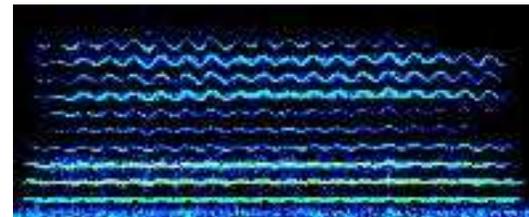


Digitale Signale: Spektrogramme

- Mit der STFT kann man das **Spektrogramm** eines Audiosignals erzeugen als Folge von Kurzzeit-(Power)Spektren von Frames, gefenstert, mit oder ohne Überlapp.



Aphex Twin's „Equation“



Singstimme

Digitale Signale: z-Transformation

- Zur allg. Systembeschreibung, insbesondere von Filtern, benutzt man meist das diskrete Analogon zur Laplacetransformation, die **z-Transformation**:

$$Z\{x[k]\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}, \quad z = re^{j\omega} \in \mathbb{C}$$

- Die z-Transformation ist auch wieder linear, Verschiebungen ergeben Phasen, Ableitungen entsprechen Multiplikationen mit z . Faltungen korrespondieren Multiplikationen.

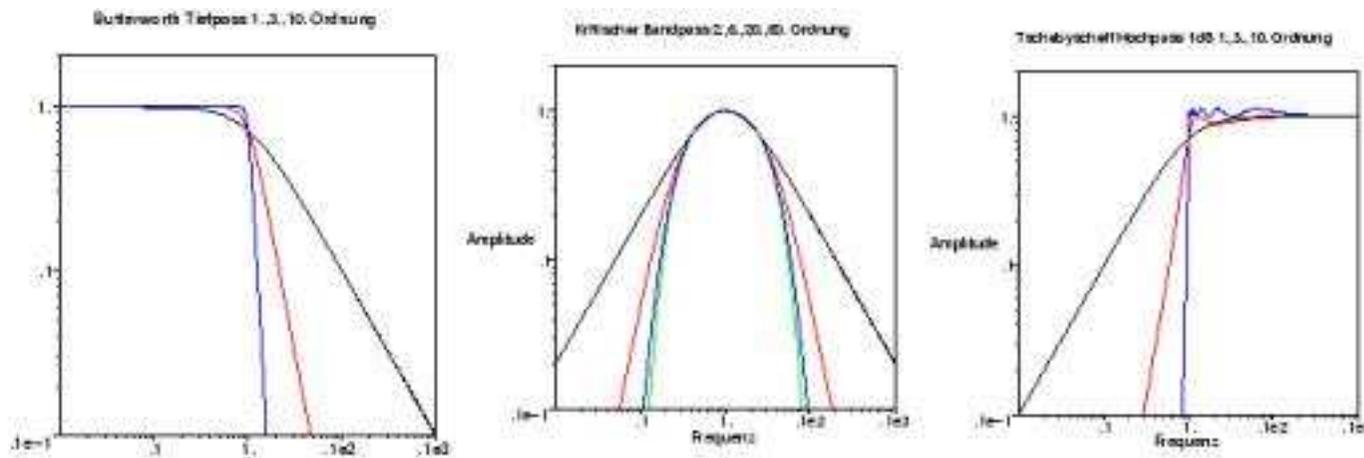
- Inverse z-Transformation:

$$x[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz,$$

C ist geschlossene Kurve im Konvergenzbereich von $X(z)$.

Digitale Filter

- Alle Übertragungsfunktionen H sind im Prinzip Filter.
- Im Audibereich versteht man unter Filter zumeist Übertragungsfunktionen mit einem bestimmtem (und gewünschten) Frequenzverhalten: Allpassfilter, Tiefpassfilter, Bandpassfilter, Hochpassfilter, Kerbfilter.



Digitale Filter

- Analog: $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$. Digital: $Y[k] = H[k]X[k]$

- Fourier-Transformation führt auf:

$$y[m] = h[m] * x[m] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[k-m]$$

- Das ist die Gleichung eines **FIR-Filter**. (Finite Impulse Response Filter) Überlagerung des Eingangssignals mit gewichteten Werten des verzögerten Signals.

- $h[k]$ ist die Impulsantwort des Filters, denn mit $x[m] = \delta[k-m]$ folgt:

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\delta[k-m] = h[m]$$

Digitale Filter

- Wir berechnen die z-Transformation des Filters:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h[k]X(z)z^{-k} \equiv X(z)H(z) \end{aligned}$$

Digitale Filter

- Die Funktion

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]z^{-k},$$

ist die Übertragungsfunktion des Filters.

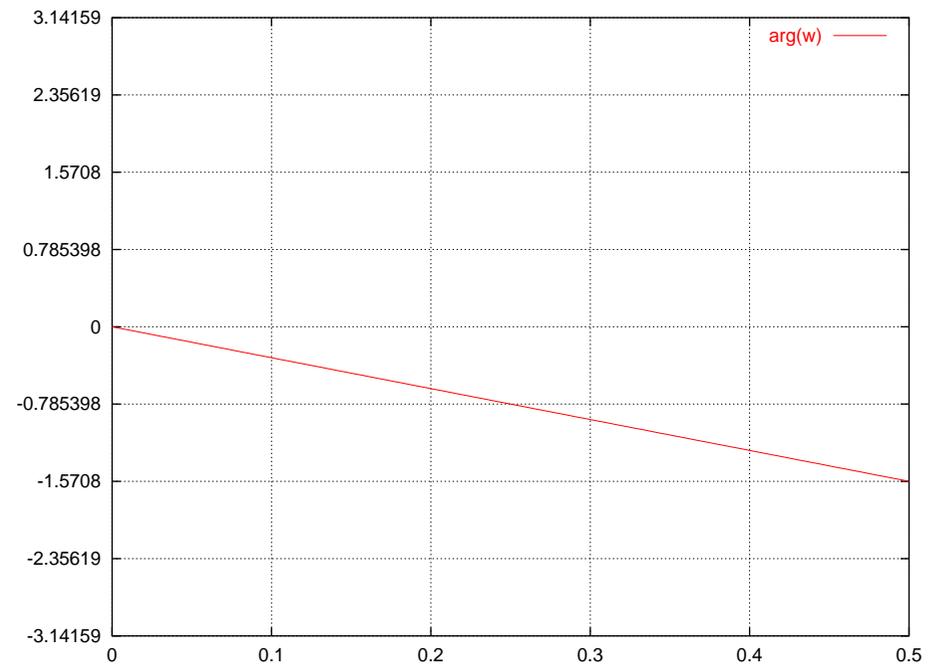
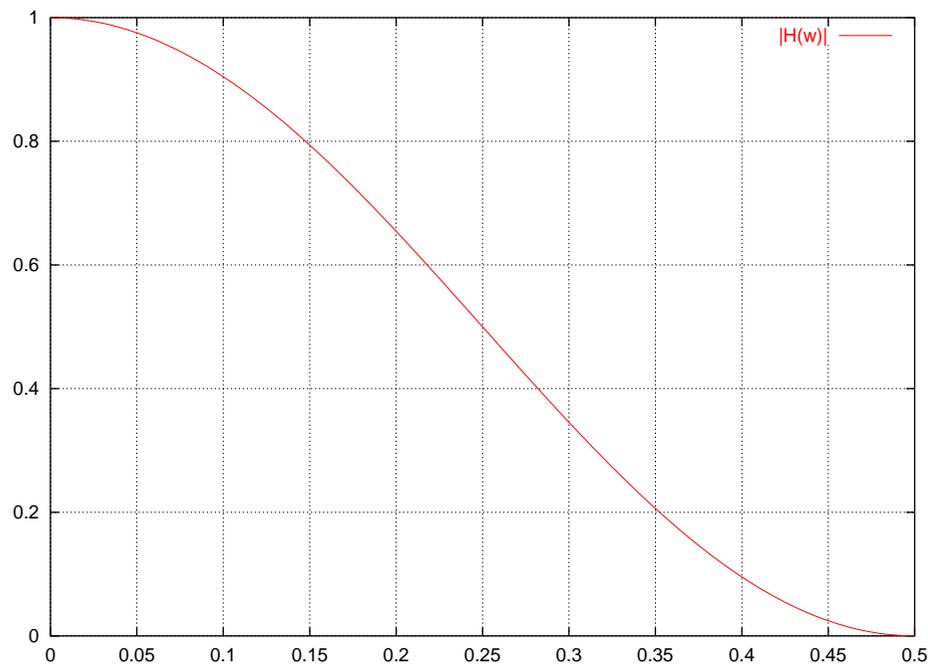
- Beispiel: $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n - 1])$
- Übertragungsfunktion: $H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}$
- Frequenzgang: $(z = e^{i\omega}, \omega = \frac{2\pi k}{N}, 0 \leq k \leq N/2)$

$$|H(e^{i\omega})| = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega)$$

Digitale Filter

Simpler Tiefpass mit

$$|H(e^{i\omega})| = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega), \quad \arg(w) = \arctan\left(\frac{-\sin \omega}{1 + \cos \omega}\right) = -\omega/2$$



Digitale Filter

- Ist ein der Filter rekursiv, d.h.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{K-1} b[k]x[n-k] + \sum_{m=1}^M a[m]y[n-m] = h * x + a * y$$

so heißt er **Infinite Impulse Response (IIR)** - Filter. (Einmal angeregt kann das Signal für immer bestehen)

- Die Übertragungsfunktion $H(z)$ ergibt sich durch z-Transformation:

$$Y(z) = B(z)X(z) + A(z)Y(z) \Rightarrow (1 - A(z))Y(z) = B(z)X(z)$$

$$H(z) := \frac{B(z)}{1 - A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} b[k]z^{-k}}{1 - \sum_{m=1}^M a[m]z^{-m}}$$

- Der Grad des Nenners M ist die **Filterordnung**.

Digitale Filter

- Die Übertragungsfunktion ist eine analytische Funktion in der komplexen Zahlenebene und durch die Nullstellen von Zähler und Nenner eindeutig bestimmt. Die Nullstellen des Nenners heißen **Pole**.

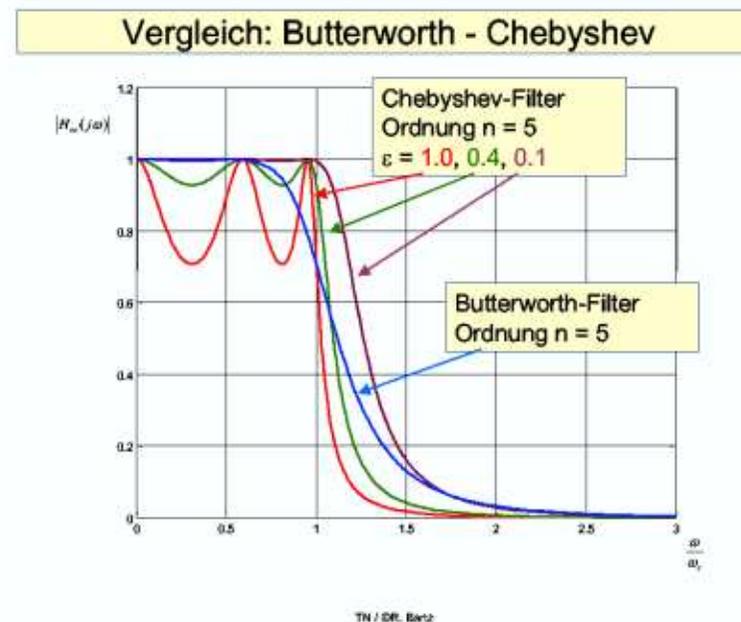
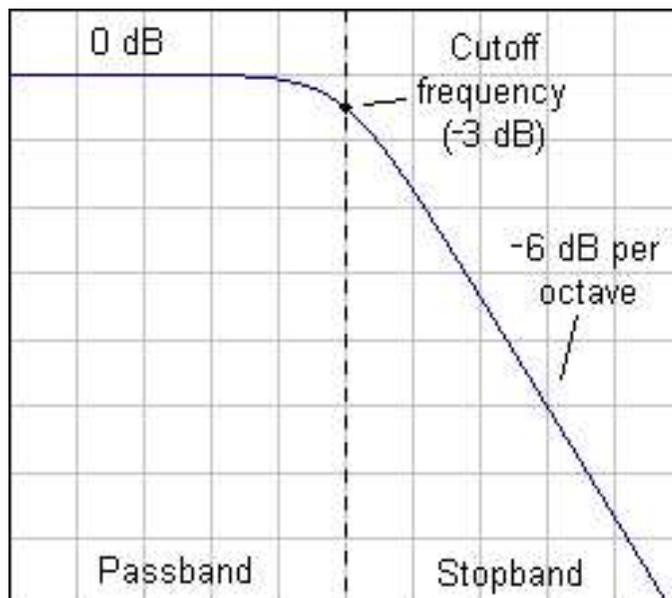
- Die Pol-Struktur bestimmt das Verhalten und die Stabilität des Filters, denn

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z - z_0}\right\} = e^{-z_0 t} = e^{-\Re(z_0)t} e^{-i\Im(z_0)t}$$

- Ein IIR kann durch die Feedbackschleife eine unendliche Impulsantwort haben.
- IIR haben gegenüber den FIR den Vorteil stärkeren Abfalls an den Cut-off-Frequenzen mit weniger Koeffizienten, aber evtl. instabil.

Digitale Filter

- Filter-Begriffe: Filterordnung, Passband, Stopband, Cutoff-(Grenz)frequenz, Roll-off, Dämpfung, Ripple, Übergangsband.



Digitale Filter: Filterdesign

- Ideale Filter können stets nur angenähert werden. Deswegen ist Filter-Design „eher eine Kunst als eine Wissenschaft“.
- Ein paar bekannte Filter:
 - Butterworth-Filter
 - Chebychev-Filter
 - Bessel-Filter
 - elliptische Filter
 - Remez Filter
 - etc.pp.
- Zum Rumprobieren: http://dolphin.wmin.ac.uk/filter_design.html