RMA - MuWi UHH WS 05/06

Mathematische Melodieanalyse - Ein Streifzug

Klaus Frieler

Universität Hamburg

Mathematische Melodieanalyse - Einleitung

- Mathematische Melodieanalyse befasst sich mit der algorithmischen Analyse einstimmiger Melodien

  1. Kognitive/Psychologische Modelle
  2. Statistische Untersuchungen: Klassifikation, Seriation, Stilistik
  3. Objektivierung/Automatisierung manueller Analysemethoden
  4. Analytischer Werkzeugzeugkasten
  5. Music Information Retrieval: Gewinnung von Metadaten

Einleitung

Die wichtigsten analytischen Teilgebiete

1. Rhythmus/Metrumsanalyse
2. Melodische Ähnlichkeit
3. Segmentierung
4. Komplexität (Rhythmisch, melodisch, harmonisch)
5. Tonalitätsanalyse
6. Motivische Analyse

Die wichtigsten statistischen Teilgebiete sind

1. Genre/Stil/klassifikation

2. Komponistenattribution

3. Musikethnologische Vergleiche

4. Seriation

5. Universalien, anthropologische Konstanten

Einleitung

Rahmenbedingungen unseres Ansatzen der mathematischen Melodieanalyse:

- Wir betrachten ausschließlich monophone Musik (Melodien und Rhythmen)
- Wir versuchen einen formalen Rahmen zu schaffen, der allgemein genug ist um alle Ansätze “auf dem Markt“ auf einer gemeinsamen Grundlage zu vergleichen: $\Rightarrow$ Komparativer Ansatz.
- So allgemein wie nötig, so konkret wie möglich: Wir vermeiden zu große Verallgemeinerungen (vgl. Mazzola Topostheoretischer Ansatz)
- Der allgemeine Rahmen wird durch empirische Evaluationen ergänzt $\Rightarrow$ Empirischer Ansatz

Einleitung

- Das ergibt den **empirisch-komparativen Ansatz**

- Alter Hut: Das ist die Definition von Naturwissenschaft!

- Das alles auf der philosophischen Basis des (radikalen, realistischen) Konstruktivismusses.

Grundlegender mathematische Begriff für einstimmige Melodien ist die **Folge**:

Definition 1 (Folge) *Sei $\mathbb{E}$ eine Menge, und $N \leq M$ zwei ganze Zahlen. Eine **Folge** in (Normalform) über $\mathbb{E}$ ist eine diskrete Abbildung*

$$\begin{aligned} \phi : [0, N-1] &\rightarrow \mathbb{E} \\ n &\mapsto \phi(n) \end{aligned}$$

*$|\phi| = N$ ist die Länge der Folge. Der Raum aller Folgen der Länge N schreiben wir mit $F_N(\mathbb{E})$. Für den Raum aller endlichen Folgen über $\mathbb{E}$ schreiben wir $F(\mathbb{E})$. Die Menge $F_0(\mathbb{E}) = \emptyset$ ist die **Leerfolge**.*

Ein wichtiger Spezialfall von Folgen sind Zeichenketten oder Strings:

Definition 2 (Zeichenkette/String) *Sei Σ ein Alphabet (d.h. eine Menge von Symbolen, inklusive dem leeren Symbol). Eine **Zeichenkette** oder **String** über Σ ist eine Folge $s \in F_N(\Sigma)$.*

Ein weiterer Spezialfall sind Folgen von reellen Zahlen ($\mathbb{E} = \mathbb{R}$). Folgen reeller Zahlen kann man immer auch als Vektoren auffassen! (Man beachte aber den konzeptuellen Unterschied...!)

Der zentrale Begriff der MaMusAna ist der des Rhythmus:

Definition 3 (Rhythmus) *Sei $\mathbb{E}$ eine Ereignisraum. Eine endliche, diskrete Abbildung*

$$\begin{aligned} r : [0, N-1] &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \mathbb{R}_0^+ \\ n &\mapsto (t_n, e_n, d_n), \end{aligned}$$

*heißt **Rhythmus** mit Dauern falls*

$$t_n < t_m \Leftrightarrow n < m.$$

und

$$t_n + d_n \leq t_{n+1}.$$

Den Raum aller Rhythmen der Länge N zum Ereignisraum $\mathbb{E}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_N^{\mathbb{E}} (= F_N(\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \mathbb{R}_0^+)$, den Raum der Rhythmen beliebiger Länge mit $\mathcal{R}^{\mathbb{E}}$.

Wir vereinbaren noch eine paar Bezeichnungen und Sprechweisen:

- t_n heißen **Einsatzpunkte** oder **Onsets**, d_n die (eigentlichen) **Dauern**,
- $\delta t_n = t_{n+1} - t_n$ sind die **Einsatzintervalle** oder **IOI's** (*inter-onset intervals*).
- Eine Rhythmus mit $\mathbb{E} = \emptyset$ heißt **reiner Rhythmus**.
- $N \equiv l(r_{\mathbb{E}})$ ist die **Länge** des Rhythmus,
- $D(r_{\mathbb{E}}) = t_{N-1} + \delta_{N-1} - t_0$ ist die **Dauer** des Rhythmus.

Definitionen: Rhythmus

- Diese Rhythmusdefinition ist sehr allgemein und hinreichend, um (fast) alle Modelle darstellen zu können.

- Faktisch, ist Rhythmus nach dieser Defintion eine diskrete Zeitreihe mit Dauern: Börsenkurse und Fieberkurven sind auch Rhythmen!

- Durch geeignete Wahl des Ereignisraums kann man fast alles „erschlagen“.

- Oft werden aber nur einzelne Komponente dieses Rhythmus in Modellen gebraucht, mathematisch entspricht das Projektionen.

- Häufig werden Transformationen zur Darstellung genommen, z.B. Intervalle, Pitch-classes, Dauern, Dauernverhältnisse etc.

Eine (abstrakte) Melodie ist dann ein Spezialfall des Rhythmus.

Definition 4 (Melodie) *Sei* $\mathbb{E} \in \{\mathbb{R}^+, \mathbb{N}\}$*. Eine endliche, diskrete Abbildung (ein lokalisierter Rhythmus)*

$$\begin{aligned} \mu : [0, N-1] &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{E} \\ n &\mapsto (t_n, p_n), \end{aligned}$$

heißt ***Melodie*** *falls*

$$t_n < t_m \Leftrightarrow n < m.$$

Die Werte p_n *heißen* ***Tonhöhen*** *(**pitch**). Der Fall* $\mathbb{R}^+$ *entspricht der Darstellung mit Frequenzen, der Fall* $\mathbb{N}$ *der Indizierung in einem Tonsystem, etwa dem gleichstufig temperierten System. (Kodierung durch MIDI-Pitch, 0-127). Den Raum der Melodien über* $\mathbb{E}$ *der Länge N bezeichnen wir mit* $\mathcal{M}_N(\mathbb{E})$*, den Raum aller Melodien mit* $\mathcal{M}(\mathbb{E})$*.*

Projektionen von Melodien

Definition 5 (Projektionen) *Sei eine Melodie μ der Länge $N = l(\mu)$ gegeben. Die* ***Tonhöhenmelodie*** *(oder auch einfach Melodie) ist die Projektion auf die zweite Komponente:*

$$\begin{aligned} P_\pi \mu : [0, N-1] &\rightarrow \mathbb{E} \\ n &\mapsto p_n, \end{aligned}$$

Enstprechend ist der Rhythmus einer Melodie die Projektion auf die erste Komponente:

$$\begin{aligned} P_\rho \mu : [0, N-1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto t_n. \end{aligned}$$

Eine Melodietransformation bildet eine Melodie auf eine Folge ab. Die wichtigsten Transformationen nennt man auch Darstellungen, z.B. Intervall- und Dauerndarstellung.

Definition 6 (Intervalldarstellung) *Die **Intervalldarstellung** ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} I : \mathcal{M}_N &\rightarrow \mathcal{M}_{N-1} \\ \mu &\mapsto I\mu \end{aligned}$$

mit

$$I\mu(n) = (t_n, p_{n+1} - p_n) =: (t_n, \delta p_n)$$

Definition 7 (IOI-Darstellung) *Die IOI-Darstellung ist die Abbildung*

$$\Delta : \mathcal{M}_N \to F_{N-1}(\mathbb{R})$$

mit

$$\Delta(\mu)(n) = t_{n+1} - t_n = \delta t_n.$$

Definition 8 (Normalisierte. IOI-Darstellung) *Sei $T_B \in \mathbb{R}^+$ eine Zeitkonstante. Die norm. IOI-Darstellung ist die Abbildung*

$$\Delta : \mathcal{M}_N \to F_{N-1}(\mathbb{R})$$

mit

$$\Delta(\mu)(n) = \frac{t_{n+1} - t_n}{T_B} = \frac{\delta t_n}{T_B}.$$

*Gibt es ein T_B, so dass alle $\Delta(\mu)(n)$ ganze Zahlen sind, so heißt die Melodie **quantisiert***

Oft werden auch IOI-Verhältnisse betrachtet.

Definition 9 (IOI-Ratio-Darstellung) *Die (rel-, Log-)IOI-Ratio-Darstellungen sind Abbildung*

$$R_{(\mathrm{log})\Delta} : \mathcal{M}_N \quad \to \quad F_{N-2}(\mathbb{R})$$

mit

$$R_\Delta(\mu)(n) = \frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\delta t_{n+1}}{\delta t_n}.$$

oder

$$R_{\mathrm{log}\,\Delta}(\mu)(n) = \log_2 \frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = \log_2 \frac{\delta t_{n+1}}{\delta t_n}.$$

Ebenfalls grundlegend sind die Tranformationen Transposition, Zeitverschiebung und Tempowechsel:

Definition 10 (Transposition, Zeitverschiebung, Tempowechsel) *Sei $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$ eine Melodie. Dann ist eine* ***Transposition*** *T_p für $p \in \mathbb{N}$ gegeben durch:*

$$T_p\mu(n) = (t_n, p_n - p).$$

Eine ***Zeitverschiebung*** *T_τ für $\tau \in \mathbb{R}$ ergibt eine Melodie mit*

$$T_\tau(t_n, p_n) = (t_n - \tau, p_n).$$

Ein ***Tempowechsel*** *für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$T_\lambda(t_n, p_n) = (\lambda(t_n - t_0) + t_0, p_n).$$

Beispiel. Sei $(0, 60), (0.75, 62), (1.0, 64), (1.5, 65), (2.0, 60)$ eine Melodie.

- Tonhöhenmelodie: $(60, 62, 64, 65, 67)$

- Intervalldarstellung: $(2, 2, 1, -4)$

- Transposition um einen Halbton nach oben:

$$(0, 61), (0.75, 63), (1.0, 65), (1.5, 66), (2.0, 67)$$

- Frequenzdarstellung:

$$(0, 261.63), (0.75, 293.66), (1.0, 329.63), (1.5, 349.22), (2.0, 392.0)$$

Transformationen

- Rhythmusprojektion: $(0, 0.75, 1.0, 1.5, 2)$

- IOI-Darstellung: $(0.75, 0.25, 0.5, 0.5)$, norm. IOI Ratio ($T_B = 0.25$): $3, 1, 2, 2$

- IOI-Ratio: $(3, 2, 1)$, Log-IOI-Ratio: $(1.58, 1, 0)$,

- Zeitverschiebung ($\tau = 0.5$): $(0.6, 61), (1.25, 63), (1.5, 65), (2.0, 66), (2.5, 67)$

- „Double-Time“ ($\lambda = 0.5$): $(0, 61), (0.375, 63), (0.5, 65), (0.75, 66), (2.0, 67)$

Transformationen

Neben den Basistranformationen gibt es eine unendliche Vielfalt von Transformationen, zumeist mehr oder minder musikwissenschaftlich inspiriert. Ein Auswahl:

- Konturisierung: Wähle Extremwerte der Tonhöhenmelodie und interpoliere zwischen diesen.
- Rangfolgen: Ersetze Tonhöhen durch ihren Rang.
- Fouriertransformation: Diskrete Fouriertransformation der Tonhöhen
- Fuzzifizierungen/Klassifikationen: Ordne Dauern oder Intervalle o.ä. in bestimmte Klassen ein. Können sich die Klassen auch überlappen hat man Fuzzifizierungen. Z.B: Diatonische Klassen, Pitchclass, Parsons-Code etc.

Transformationen

- Implication-Realisation (Narmour): Ordne Folgen von 2-3 Tönen ihre I/R Klasse zu.

- Akzentabbilungen: Ordne jedem Ton einen Akzentwert nach bestimmten (empirischen) Regeln zu.

- Tonalitätsabbildung: Ordne Unterfolgen (z.B. taktweise) Tonalitätswerte zu.

- Rhythmische Gewichtung (quantisierte Melodien only): Ersetze jeden Ton durch soviele Töne mit Elementardauer, dass die Gesamtdauer erhalten bleibt

- Selektion/Reduktion: Streiche Töne (z.B. wiederholte oder nichtakzentuierte Töne) oder wähle Töne aus (z.B. auf Taktschwerpunkten)

Allgemeine Modelle

Alle Modelle und Analysemethoden sind nach folgendem Schema aufgebaut.

1. Objekt-Analyse
   - Eingabe: Eine oder mehrere Melodien
   - Algorithmus
     (a) Basistransformation/Darstellung
     (b) Haupttransformation
     (c) Verrechnungsalgorithmus
   - Ausgabe: Kennzahlen (ein oder mehrdimensional)

Allgemeine Modelle

1. Statistikstufe

   - Eingabe: Kennzahlen, evtl. empirische Daten
   - evtl. Aggregierung der Daten, Feature 2. Ordnung
   - Statistischer Algorithmus
   - Ausgabe: Ergebnis (Was sonst...?!).