Aufgaben zu Komplexen Zahlen

1. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2

   a) $z_1 = 1$, $z_2 = 2$

   b) $z_1 = -2$, $z_2 = 3i$

   c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$

   d) $z_1 = -4 + 3i$, $z_2 = 3 - 5i$

   e) $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$

   f) $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

2. Berechnen Sie $\overline{z}$, $-z$, $-\overline{z}$, $|z|^2 = z\overline{z}$ und zeichnen Sie z in ein Koordinatensystem (komplexe Ebene) ein.

   a) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

   b) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

   c) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$

   d) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i)$

   Bringen Sie z in Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $r^2 = |z|^2$, $\varphi = \arctan \frac{Im(z)}{Re(z)}$ (Bogenmass , $360° \triangleq 2\pi$)

3. Zeigen Sie:

   a) Für $z = re^{i\varphi}$ gilt: $\overline{z} = re^{-i\varphi}$

   b) $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$

   c) $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$

   d) $Re(z_1 z_2) = Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2)$

   e) $Im(z_1 z_2) = Im(z_1)Re(z_2) + Re(z_1)Im(z_2)$

4. Beweisen Sie die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

   Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1 f), 3 d) und 3 e).