Basiswissen Signalverarbeitung

Klaus Frieler

Universität Hamburg

Was ist ein Signal?

- Abstrakt: Ein Unterschied in der Umwelt (System) der einen Unterschied in einem System (Umwelt) bewirkt.

- Ein System kommuniziert mit seiner Umwelt über Signale. Signale tragen Information.

- Signale zumeist Funktionen der Zeit $x(t)$ oder des Raumes $s(x, y, z)$ oder beides $s(x, y, z, t)$ aufgefasst werden.

- Musik in diesem Sinne ist zeit- und wertkontinuierliches (analoges) Signal.

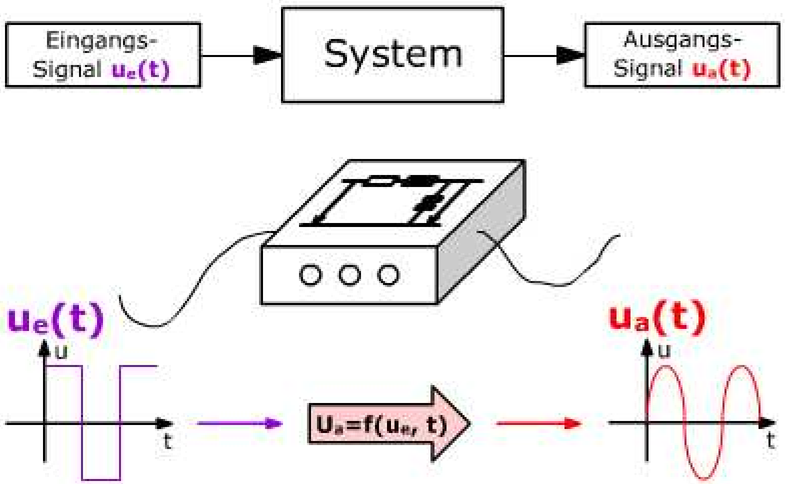
- Beispiel Gitarrenverstärker:
  mechanisches Signal $\longrightarrow$ elektrisches Signal $\longrightarrow$ mechanisches Signal $\longrightarrow$ akustisches Signal

Was ist ein Signal?

- Ein System transformiert ein Eingangssignal $x(t)$ in ein Ausgangssignal $y(t)$:

$$y(t) = H(x(t))$$

Der Operator H heißt Übertragungsfunktion.
Beispiel Gitarrenverstärker:
$y_{Schall}(t) = H_{Lautsprecher}(H_{Verstärker}(H_{Kabel}(H_{Tonabnehmer}(x_{Saite}(t)))))$



Was ist ein Signal?

- Ein System heißt linear, falls eine Summe von Eingangssignalen zu einer Summe der entsprechenden Ausgangssignale führt:

$$H(Ax_1(t) + Bx_2(t)) = AH(x_1(t)) + BH(x_2(t)) = Ay_1(t) + By_2(t)$$

- Ein System heißt zeitinvariant, wenn die Übertragungsfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h.

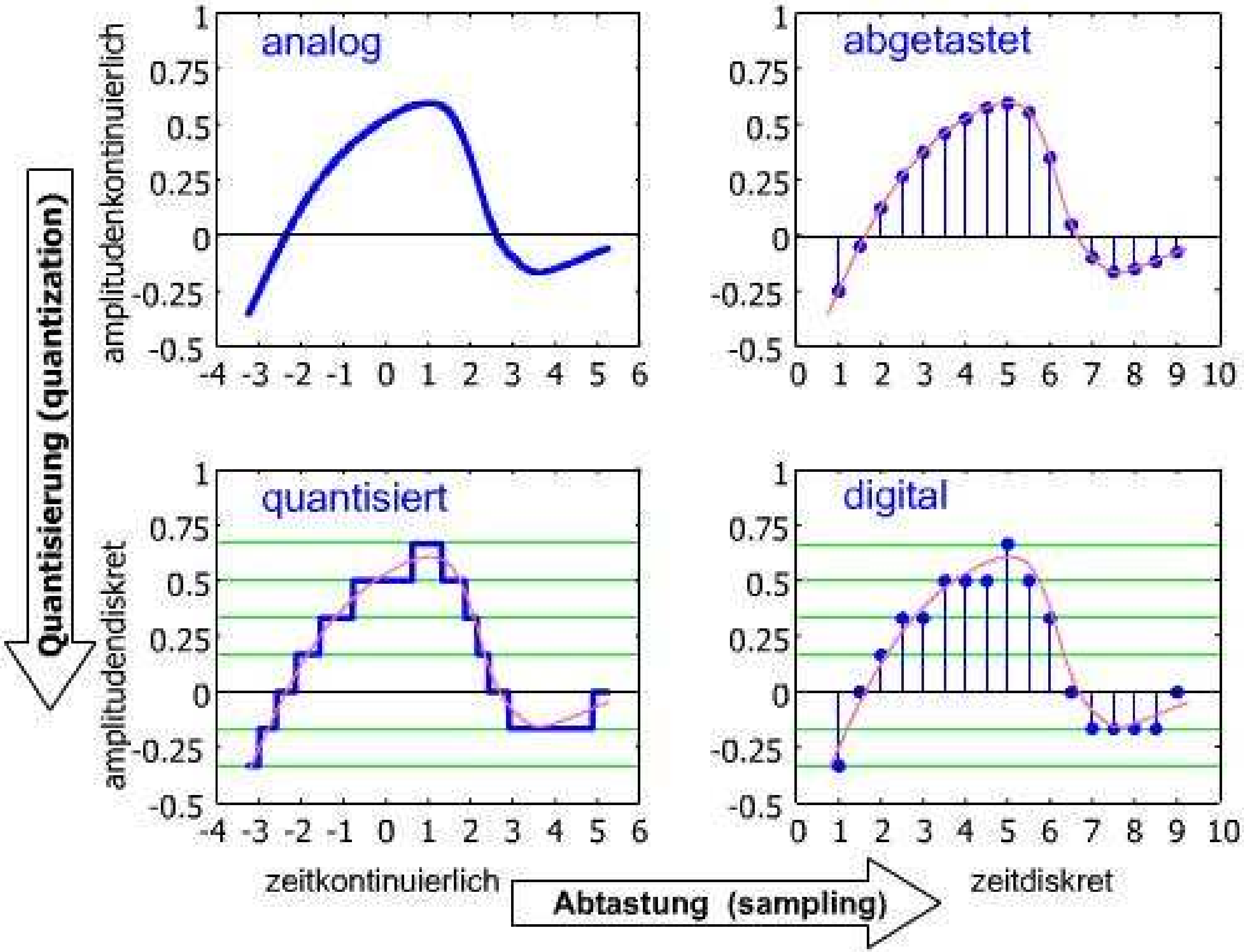
$$y(t - \tau) = H(x(t - \tau))$$

- Lineare, zeitinvariante (LTI-)Systeme von herausragender Bedeutung in der Signalverarbeitung/Systemtheorie $\longrightarrow$ vollständig beschreibbar.

Was sind Signale?

- Man unterscheidet vier Sorten von Signalen nach Wertetyp:
  - analoge (zeit-, wertkontinuierlich)
  - abgetastete (zeitdiskret, wertkontinuierlich)
  - quantisierte (zeitkontinuierlich, wertdiskret)
  - digitale (zeit-, wertdiskret)
- Man unterschiedet zwei Sorten von Signalen nach Kausaliät
  - Kausale Signale: $x(t) = 0$ für $t < 0$
  - Nichtkausale Signale: Sonst

Was sind Signale?



Fourieranalyse: Fourierreihe

- Ist f eine periodische Funktion mit Periode T, d.h.

$$f(t+T) = f(t)$$

so kann man f als **Fourierreihe** schreiben. Diese gibt es in drei Versionen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n t}{T}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{2\pi n t}{T}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \end{aligned}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt$$

Signalanalyse: Fourierreihen

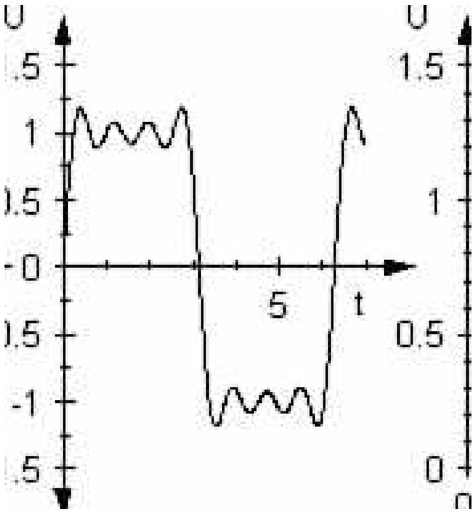
- Zwischen den Koeffizienten herrschen die Beziehungen ($n > 1$):

$$
\begin{aligned}
a_n &= A_n sin \varphi_n \\
b_n &= A_n cos \varphi_n \\
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - i b_n) = \frac{-i A_n}{2} e^{i \varphi_n} \\
c_{-n} &= \overline{c_n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) = \frac{i A_n}{2} e^{-i \varphi_n}
\end{aligned}
$$

- Man kann also beliebige periodische Funktionen (und nur die!) als lineare Summe (additive Synthese) einfacher Sinus-und Cosinusschwingungen darstellen, wobei die Koeffizienten das Spektrum der Funktion angeben.

Beispiel: Rechteckschwingung ($T = 2\pi$)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



$$c_{2n} = 0$$
$$c_{2n+1} = -\frac{2i}{(2n+1)\pi}$$
$$\Rightarrow$$
$$a_n = 0$$
$$b_{2n} = 0$$
$$b_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \ldots)$$

Signalanalyse: Fouriertransformatiom

- Die Fouriertransformation ist ein wichtiges Hilfsmittel zur theoretischen Analyse linearer Systeme und Differentialgleichungen.

- Für (nahezu) beliebige Signale kann man auch eine Frequenzzerlegung als Verallgemeinerung der Fourierreihe finden. Die Fouriertransformation ist durch folgendes Intgeral definiert:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} \equiv F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ ist die Kreisfrequenz. Die FT ist eine komplexe Funktion! Verschiedene Normierungen möglich.

- $F(\omega)$ nennt man das Spektrum von f und enthält auch negative Frequenzen! Zusammenhängende Abschnitte auf der Frequenzachse heißen Frequenzbänder.

Signalanalyse: Fouriertransformation

- Kennt man das Spektrum $F(\omega)$, so kann man das Signal durch eine inverse Fouriertransformation wiedergewinnen:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

- Beispiel: Gaußsignal. Ist

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

  so erhält man nach etwas Rechnung

$$F_\sigma(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

  also wieder eine Gaußfunktion mit Breite $1/\omega$

- Frage: Was passiert wenn σ gegen Null strebt? (Antwort später.)

- Einige Eigenschaften der Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\mathcal{F}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{F}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\}$$

wobei

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

die Faltung bezeichnet.

Signalanalyse: Fouriertransformation

- Einseitiges Leistungs (Power)-Spektrum (positive Frequenzen):

$$P(\omega) \propto |F(\omega)|^2 + |F(-\omega)|^2$$

- Leistung wird oft in dB gemessen:

$$dB(P) = 10 \log(\frac{P}{P_0})$$

P_0 ist die Bezugsgröße (beliebig), 3 dB entsprechend etwa einer Verdopplung der Leistung.

- In der Signalverarbeitung ist oft eine Verallgemeinerung der FT gebräuchlicher, die Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\{x(t)\} \equiv X(s) = \int_0^\infty f(t) e^{st} dt, \quad s = \sigma + i\omega \quad \text{(komplexe Frequenz)}$$

Exkurs I: Distributionen

- Distributionen sind verallgemeinerte Funktionen, sie lassen sich als Grenzwerte von Funktionen auffassen, die selbst keine Funktionen mehr sein müssen.

- Sie haben streng genommen nur Bedeutung “unterm Integral“.

- Wichtigste Distribution: Die Diracsche δ-Funktion. Für sie gilt

$$\int \delta(t-\tau)f(t)dt = f(\tau) = \delta(\tau) * f(\tau), \quad \text{(Siebeigenschaft)}$$

- Man kann sie sich z.B. als unendlich spitze Gaußkurve vorstellen, an einem Punkt unendlich, überall sonst 0.

Exkurs I: Distributionen

- Eigenschaften der Delta-Funktion.

$$\int \delta(t-\tau)dt = 1 \quad \text{(Normiertheit)}$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\delta'(t)f(t) = -\delta(t)f'(t)$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(g(t)) = \sum_{t_i:g(t_i)=0} \frac{\delta(t-t_i)}{|g'(t_i)|}$$

Exkurs I: Distributionen

- Die Bedeutung rührt vor allem aus der Tatsache, dass man mit der Impulsantwort (=Reaktion auf einen Dirac-Impuls) „alles“ über ein lineares und zeitinvariantes System weiß.

- Die Fouriertransformierte der δ-Funktion ist die konstante Funktion. (In einem Dirac-Impuls sind alle Frequenzen vertreten).

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^0 = 1$$

$$\mathcal{F}\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \delta(\omega)$$

- Sehr wichtig ist auch die Sprungfunktion (Heavysidefunktion):

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Exkurs II: Lineare Differentialgleichungen

- Die wichtigsten LTI-Systeme, insbesondere in der Physik sind lineare DGl. mit konstanten Koeffizienten.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n}{dt^n} x(t) = y(t)$$

- Beispiel: Harmonischer Oszillator mit Sinusförmiger-Anregung

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + k x(t) = \sin(t)$$

- Wir definieren ein Polynom der Ordnung N durch

$$L(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

Exkurs II: Lineare Differentialgleichungen

- Eine lin. DGL kann man dann kompakt schreiben als

$$L(\frac{d}{dt})x(t) \equiv L_t x(t) = y(t)$$

- Wir definieren die zugehörige Impulsantwort (Greens' Funktion) $h(t)$ als Lösung der Gleichung

$$L(\frac{d}{dt})h(t) = \delta(t)$$

- Jede Lösung der der DGL zu einer Anregung $y(t)$ ergibt sich dann als Faltung mit der Impulsantwort

$$x(t) = h(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')y(t')dt'$$

Warum?

Exkurs II: Lineare Differentialgleichungen

- Wir wenden L auf diese Lösung an:

$$\begin{aligned} L_t x(t) &= L_t(h(t) * y(t)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L_t(h(t-t')y(t'))dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L_t(h(t-t'))y(t')dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')y(t')dt' \\ &= y(t) \end{aligned}$$

- Das bedeutet, die Impulsantwort weiß alles über das System.

Exkurs II: Lineare Differentialgleichungen

- Mit Hilfe der Fouriertransformation lassen sich die DGL kompakt lösen. Wir transformieren beide Seiten

$$\mathcal{F}\{L_t x(t)\} = \mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega)$$

Die rechte Seite ergibt nach den Regeln der FT

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{L_t x(t)\} &= \mathcal{F}\{\sum_n a_n \frac{d^n}{dt^n} x(t)\} \\
&= \sum_n a_n \mathcal{F}\{\frac{d^n}{dt^n} x(t)\} \\
&= \sum_n a_n (i\omega)^n \mathcal{F}\{x(t)\} \\
&= \sum_n a_n (i\omega)^n X(\omega) \\
&= L(i\omega) X(\omega)
\end{aligned}$$

Exkurs II: Lineare Differentialgleichungen

- Die FT der Lösung (für $Y(\omega) \neq 0$) erhält man also durch

$$X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{L(i\omega)}$$

- Für die Impulsantwort ($Y(\omega) = 1$) erhält man:

$$H(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$$

- Für die homogene Gleichung ($Y(\omega) = 0$) erhält man:

$$X_0(\omega)L(i\omega) = 0 \Rightarrow X_0(\omega) = \sum_{\omega_i : L(i\omega_i)=0} c_i \delta(\omega - \omega_i)$$

$$\Rightarrow x_0(t) = \sum_{\omega_i : L(i\omega_i)=0} c_i e^{i\omega_i t}$$

Exkurs II: Lineare Differentialgleichungen

- Beispiel: Impulsantwort des harmonischen Oszillators

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2 x(t) = \delta(t) \quad (\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

mit Differentialoperator

$$L(\frac{d}{dt}) = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$$

führt auf

$$H(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}$$

Partialbruchzerlegung führt auf

$$H(\omega) = \frac{1}{2\omega_0}(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0})$$

- Sei nun $y(t) = A\sin(\omega' t)$ eine Anregungsfunktion. FT führt auf

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A\sin(\omega' t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{A}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega' t} - e^{-i\omega' t}) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{A}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(\omega' - \omega)t} - e^{-i(\omega' + \omega)t}) dt \\
&= \frac{A}{2i} (\delta(\omega' - \omega) - \delta(\omega' + \omega))
\end{aligned}$$

- Das Spektrum der Lösung $X(\omega)$ ergibt sich dann aus

$$X(\omega) = H(\omega) Y(\omega)$$

Exkurs II: Lineare Differentialgleichungen

- Wir berechen $X(\omega)$:

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{A}{2i}(\delta(\omega' - \omega) - \delta(\omega' + \omega)) \\
&= \frac{A}{2i}\frac{\delta(\omega' - \omega) - \delta(\omega' + \omega)}{\omega_0^2 - \omega'^2}
\end{aligned}
$$

- Inverse FT führt, unter Beachtung von

$$
\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega - \omega')\} = e^{i\omega' t}\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}e^{i\omega' t}
$$

schließlich auf die allgemeine Lösung

$$
x(t) = \frac{A}{2\pi}\frac{\sin \omega' t}{(\omega_0^2 - \omega^2)}
$$

Digitale Signale

Vorteiler digitaler vs. analoger Signalverarbeitung:

- Garantierte Genauigkeit (definiert durch Samplingrate, Quantisierung etc.)
- Perfekte Reproduzierbarkeit von Signalverarbeitungsprozessen.
- Überlegene Performanz (Alles was mathematisch möglich, im Prinzip auch realisierbar)
- Effektivität (weniger Aufwand, geringere Kosten)

$\Rightarrow$ Wir brauchen A/D Wandlung: Sampling und Quantisierung.

- Ideales Sampling mit der Periode T kann realisiert werden durch Multiplikation mit dem Dirac-Kamm $\Delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$. Das gesamplete Signal $x_s(t)$ ist dann

$$x_s(t) = x(t)\Delta_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

- Ist $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, dann lautet die Fouriertransformierte des gesampleten Signals:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

- Das gesamplete Spektrum ist periodisch im Frequenzbereich mit der Periode $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

Digitale Signale: Abtasttheorem

- Das Abtasttheorem (Shannon-Nyquist) besagt:
  Ein gesampeltes Signal kann perfekt rekonstruiert werden, falls die Samplingrate ω_s mindesten doppelt so groß ist, wie die maximale im Signal vorhandene Frequenz ω_{max}.

$$\omega_s \geq 2\omega_{max}$$

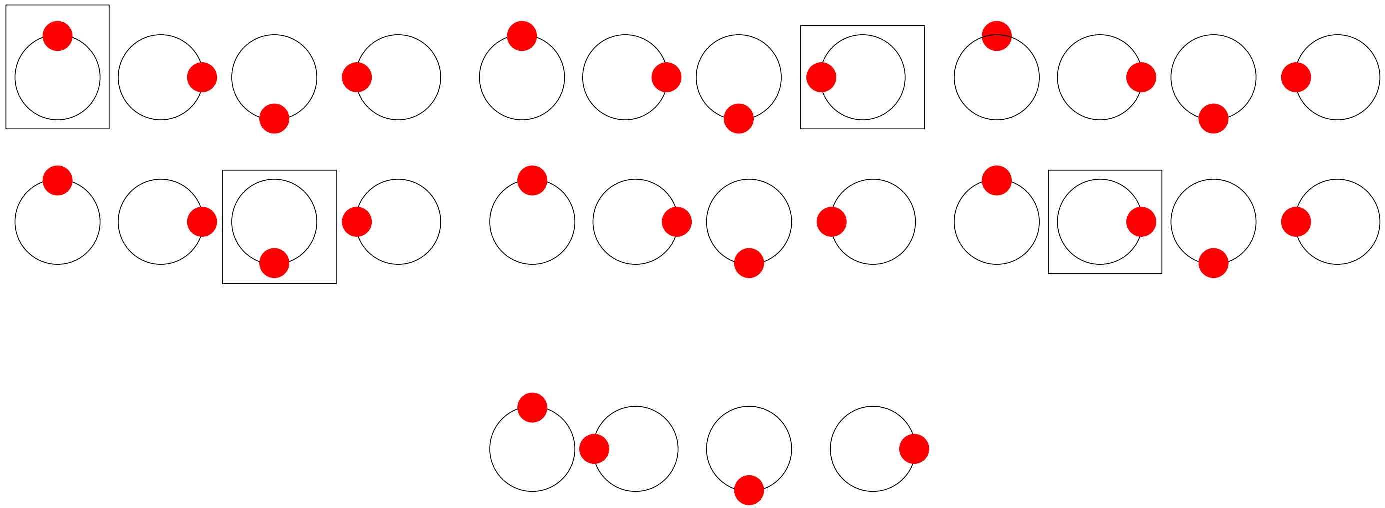
- Ist das nicht der Fall, erscheinen Frequenzanteile $\omega > \omega_s$ im Spektrum an der Stellen $|\omega - \omega_s|$. Das nennt man Aliasing.

- Das liegt daran, dass das Spektrum des gesampleten Signals aus der periodischen Fortsetzung und Überlappung des Bereichs $[-\omega_s/2, +\omega_s/2]$ besteht.

Digitale Signale: Abtasttheorem

- Beispiel: Autoräder im Film. Ab einer bestimmten Geschwindigkeit scheinen die Räder erst stillzustehen und dann sich in die entgegengesetzte Richtung mit deutlich langsamerer Geschwindigkeit zu bewegen.

  Der rote Punkt dreht sich mit einer Periode $T = 4$ rechts herum, wir samplen mit $T_s = 7$ (Rechtecke). $\rightarrow$ Scheinbare Bewegung mit Periode $T_{eff} = 28$ links herum.

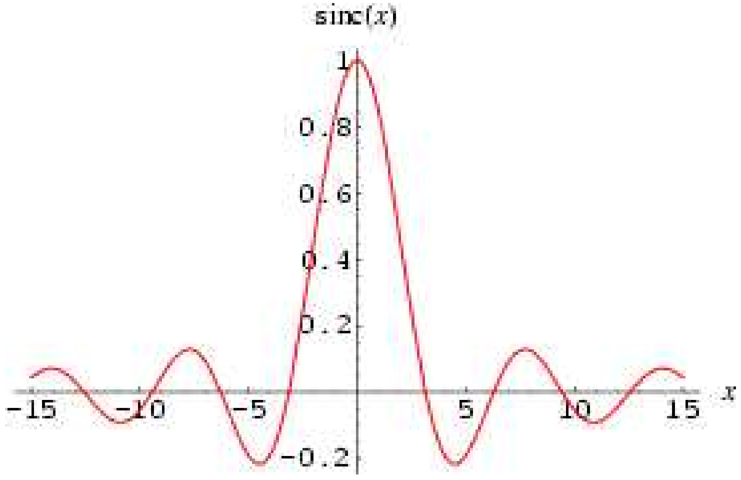


Digitale Signale: Rekonstruktion

- Ist das Samplingtheorem erfüllt, erhält man das Signal mit

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathrm{sinc}(\frac{\omega_s}{2}(t - kT))$$

zurück. ($\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$)



Digitale Signale: Aliasing

- Antialiasing: Vor (oder nach) dem Samplen wird tiefpassgefiltert mit oberer Grenzfrequenz $f_s/2$.

- Das menschliche Ohr hört bis ungefähr 20kHZ $\rightarrow$ z .B. CD-Samplingrate 44,1 kHz. ($2 \cdot 20$ kHz + 10%)

- Aliasing kann nie ganz vermieden werden, denn

  1. Perfektes Samplen ist nicht möglich (Sample & Hold)

  2. Ein perfekter Tiefpass ist nicht realisierbar

  3. Rauschen ist immer dabei.

Digitale Signale: Quantisierung

- Den analogen Samplewerten werden diskreten Stufenwerte zu geordnet. (Abschneiden, runden)

- Für Audio ist 16bit meistens hineichend. Beim Mastern werden manchmal 24bit verwendet um Fehlerfortpflanzungen zu minimieren. Intern wird oft mit Gleitkommazahlen gerechnet.

- n Bits $\rightarrow 2^n$ Quantisierungsstufen. 16bit $\doteq 2^{16} = 65536$ Stufen.

- Die Differenz zwischen dem analogem Wert und dem Quantisierungswert ist der Quantisierungsfehler $\rightarrow$ Quantisierungsrauschen.

- Z.B: Clipping: Pegel zu hoch, Quantisierung schneidet Signal oben ab.

Digitale Signale: Diskrete Fouriertransformation

- Gesamplete FT:

$$X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_s)e^{-im\omega T_s}$$

- Zur praktischen, rechnergestützten Analyse ist die FT aufgrund der Integrale und den unendlichen Grenzen schlecht geeignet.

- In der Praxis hat man kausale, zeitbeschränkte Signale, d.h. $0 \leq m < N$.

$$X(\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_s)e^{-im\omega T_s}$$

- Spektrum periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{T_s}$. Idee: Diskretisierung der Frequenzwerte.

Digitale Signale: Diskrete Fouriertransformation

- Man unterteilt man die Periode in N Punkte und erhält die Frequenzen $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_s N}, 0 \leq k < N$. Das definiert die Diskrete Fouriertransformation (DFT)

$$X(\omega_k) \equiv X[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-i\frac{2\pi mk}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_N^{-mk}$$

- Analog zur inversen FT gibt es eine Umkehrformel (IDFT):

$$x[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i\frac{2\pi mk}{N}}, \quad 0 \leq m < N$$

- DIe DFT besitzt ähnliche Eigenschaften wie die FT und nähert die FT an.

- Parzevals Formel: $\sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$

Digitale Signale: Fast Fourier Transformationen

- Es gibt viele FFT-Verfahren zur schnellen Berechnung von DFT's.
- Am verbreitesten ist die Radix-2 Cooley-Tukey FFT, die angewand werden kann falls N eine Potenz von 2 ist $N = 2^k$.
- Statt Ordnung $O(N^2)$ wie die naive Berechnung, hat dieser FFT- Algorithmus Ordnung $O(N \log N)$.
- Bei $N = 1024$ macht das einen Unterschied von ca 1 Mio. zu ca 10.000 Rechenoperationen. Faktor 100!
- Die Idee ist, dass aufgrund der Symmetrien der Einheitswurzeln, eine DFT der Länge N in zwei DFT's der Länge $N/2$ aufgespalten werden kann, jeweils zu geraden und ungeraden Indizes.

- Es gilt das Danielson-Lanczos-Lemma:

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} f(n) \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^{(2n)k} f(2n) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^{(2n+1)k} f(2n+1) \\
&= F^g(k) + W_N^k F^u(k)
\end{aligned}
$$

- Es gilt $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, $F^g(k+N/2) = F(k)$, $F^u(k+N/2) = F^u(k)$ also braucht man zudem nur die Hälfte der W_N zu berechnen.

Digitale Signale: Kurzzeit-Fouriertransformation

- Signale bearbeitet man oft auf der Basis von Frames.

- Durch die DFT enstehen an den den Rändern der Frames Fehler im Spektrum (spectral blurring).

- Zur Minimierung der Fehler und für bessere Näherungen multipliziert man die Samples mit einer Fensterfunktion $w[k]$. So erhält man die (diskrete) Kurzzeit-Fouriertransformation ((D)STFT)

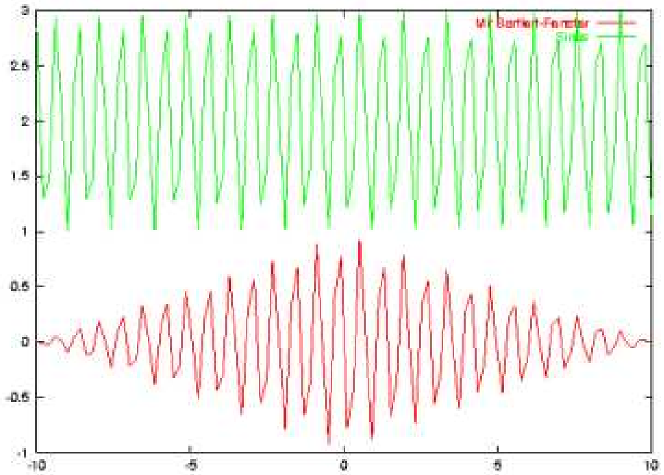
$$X[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]w[m]e^{-i\frac{2\pi mk}{N}}$$

Digitale Signale: Fensterfunktionen

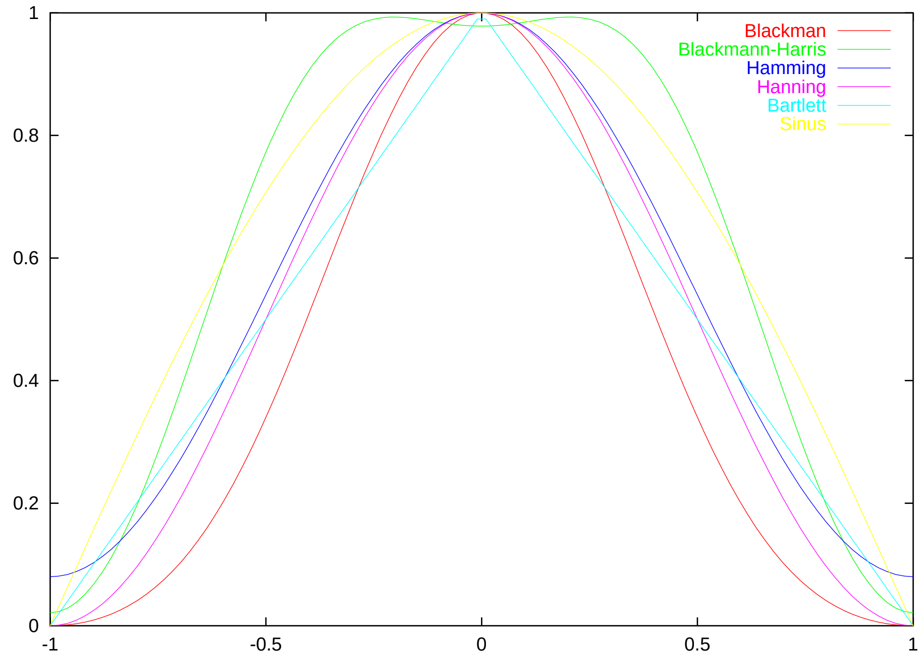
- Nichtleistungserhaltende Fenster (auf dem Interval $[-1, 1]$)
  - Rechteckfenster:
$$w(t) = 1$$
  - Dreieck- oder Bartlettfenster:
$$w(t) = 1 - |t|$$
  - Hamming/Hanningfenster:
$$w(t) = a + (1-a)\cos(t),$$
    Hanning: $a = 1/2$, Hamming: $a = 0.54$
  - Blackman/Blackman Harris Fenster:
$$f(t) = a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t), \quad \sum a_i = 1$$

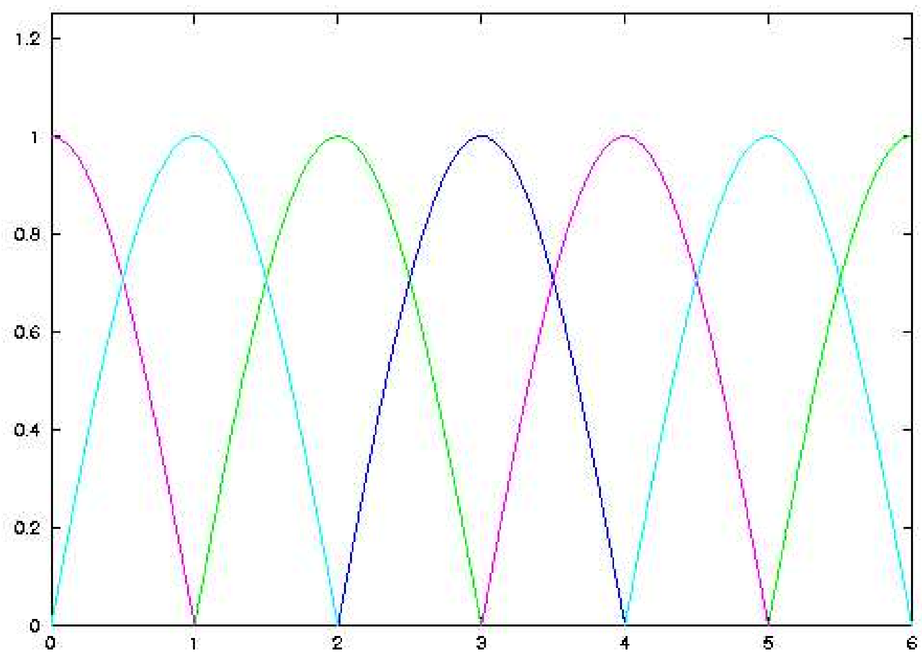
- Leistungserhaltende Fenster (auf dem Interval $[-1, 1]$)
  - Sinus Fenster: $f(t) = \sin(\pi \frac{t+1}{2})$
  - Kaiser-Fenster, abgeleitetes Kaiser-Bessel-Fenster (KBD)

$$f(t) = \frac{I_0(\pi\alpha\sqrt{1-(2t-1)^2}}{I_0(\pi\alpha)}$$



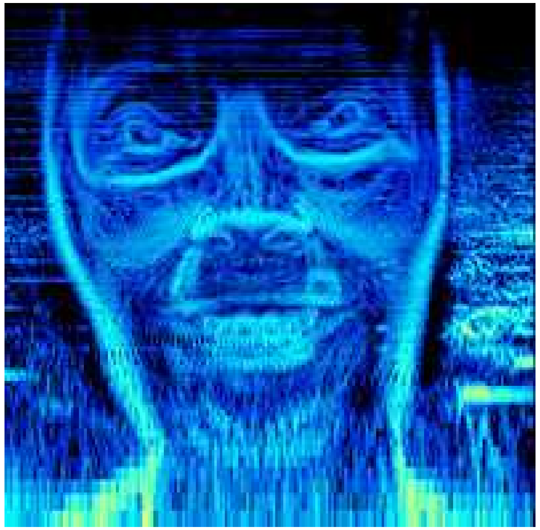
Digitale Signale: Fensterfunktionen



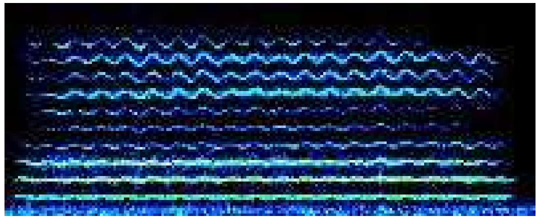


Digitale Signale: Spektrogramme

- Mit der STFT kann man das Spektrogramm eines Audiosignals erzeugen als Folge von Kurzzeit-(Power)Spektren von Frames, gefenstert, mit oder ohne Überlapp.



Aphex Twin's „Equation“



Singstimme

- Zur allg. Systembeschreibung, insbesondere von Filtern, benutzt man meist das diskrete Analogon zur Laplacetransformation, die z-Transformation:

$$Z\{x[k]\} = X(z) = \sum_{k=0\ (-\infty)}^{\infty} x[k] z^{-k}, \quad z = re^{\varphi + i\omega} \in \mathbb{C}$$

- Die z-Transformation ist auch wieder linear, Verschiebungen ergeben Phasen, Ableitungen entsprechen Multiplikationen mit z. Faltungen korrespondieren Multiplikationen.

- Inverse z-Transformation:

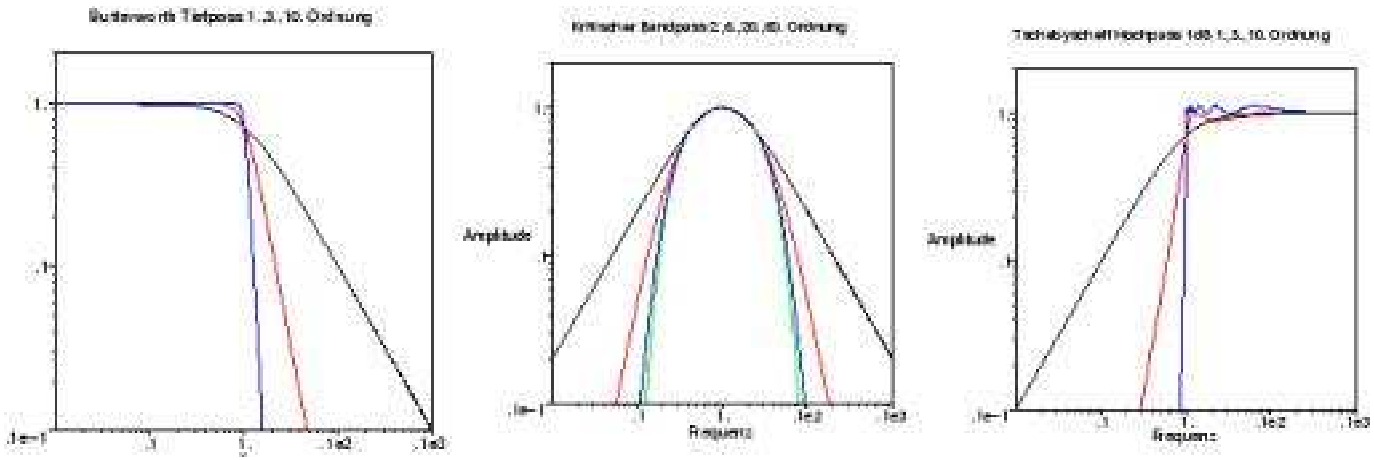
$$x[k] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{k-1} dz,$$

  C ist geschlossene Kurve im Konvergenzbereich von $X(z)$.

Digitale Filter

- Alle Übertragungsfunktionen H sind im Prinzip Filter.

- Im Audiobereich versteht man unter Filter zumeist Übertragungsfunktionen mit einem bestimmtem (und gewünschten) Frequenzverhalten: Allpassfilter, Tiefpassfilter, Bandpassfilter, Hochpassfilter, Kerbfilter.



Digitale Filter

- Analog: $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$. Digital: $Y[k] = H[k]X[k]$

- Fourier-Transformation führt auf:

$$y[m] = h[m] * x[m] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[k-m]$$

- Das ist die Gleichung eines FIR-Filter. (Finite Impulse Response Filter) Überlagerung des Eingangssignals mit gewichteten Werten des verzögerten Signals.

- $h[k]$ ist die Impulsantwort des Filters, denn mit $x[m] = \delta[k-m]$ folgt:

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\delta[k-m] = h[m]$$

- Wir berechnen die z-Transformation des Filters:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k] z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} h[k] X(z) z^{-k} \equiv X(z) H(z)
\end{aligned}
$$

- Die Funktion

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] z^{-k},$$

ist die Übertragungsfunktion des Filters.

- Beispiel: $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1])$

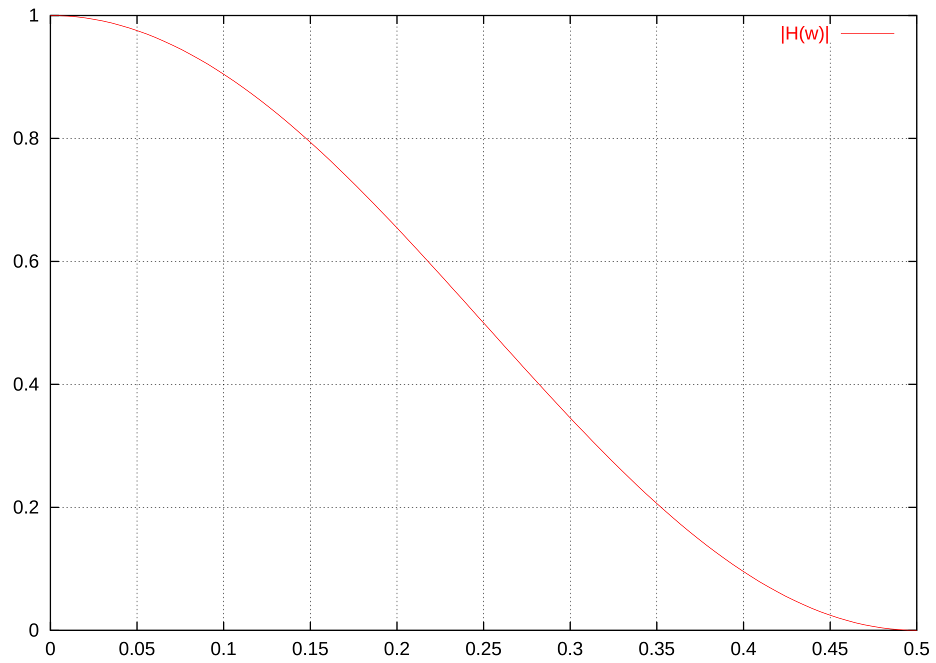
- Übertragungsfunktion: $H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1}$

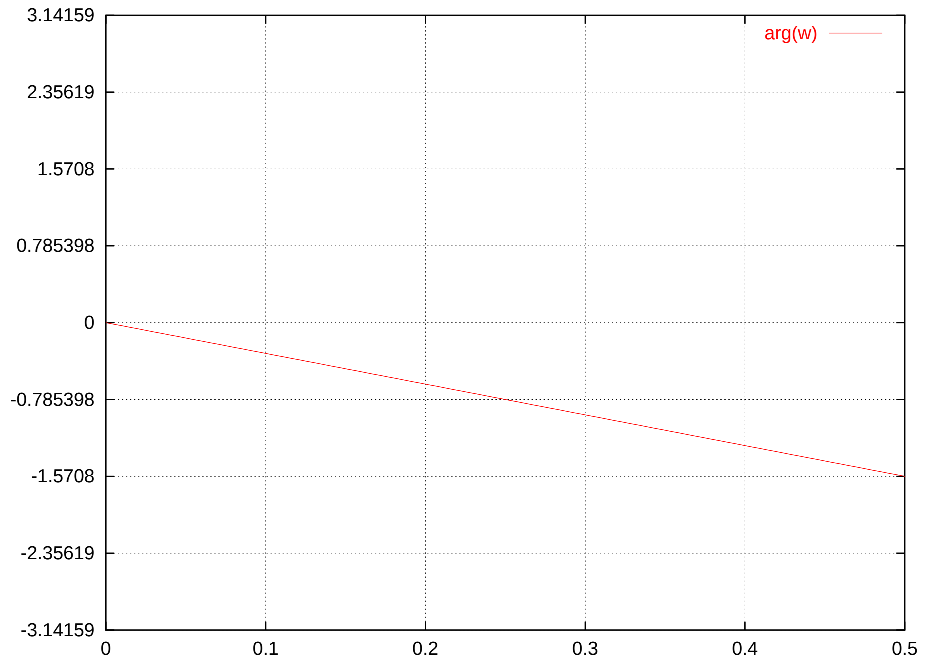
- Frequenzgang: ($z = e^{i\omega}, \omega = \frac{2\pi k}{N}, 0 \leq k \leq N/2$)

$$|H(e^{i\omega})| = \frac{1}{2}(1 + \cos\omega)$$

Simpler Tiefpass mit

$$|H(e^{i\omega})| = \frac{1}{2}(1 + \cos\omega), \quad \arg(\omega) = \arctan(\frac{-\sin\omega}{1 + \cos\omega}) = -\omega/2$$





Digitale Filter

- Ist ein der Filter rekursiv, d.h.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{K-1} b[k]x[n-k] + \sum_{m=1}^{M} a[m]y[n-m] = h * x + a * y$$

  so heißt er Infinite Impulse Response (IIR) - Filter. (Einmal angeregt kann das Signal für immer bestehen)

- Die Übertragungsfunktion $H(z)$ ergibt sich durch z-Transformation:

$$Y(z) = B(z)X(z) + A(z)Y(z) \Rightarrow (1 - A(z))Y(z) = B(z)X(z)$$

$$H(z) := \frac{B(z)}{1 - A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} b[k]z^{-k}}{1 - \sum_{m=1}^{M} a[m]z^{-m}}$$

- Der Grad des Nenners M ist die Filterordnung.

- Die Übertragungsfunktion ist eine analytische Funktion in der komplexen Zahlenebene und durch die Nullstellen von Zähler und Nenner eindeutig bestimmt. Die Nullstellen des Nenners heißen Pole.

- Die Pol-Struktur bestimmt das Verhalten und die Stabilität des Filters, denn

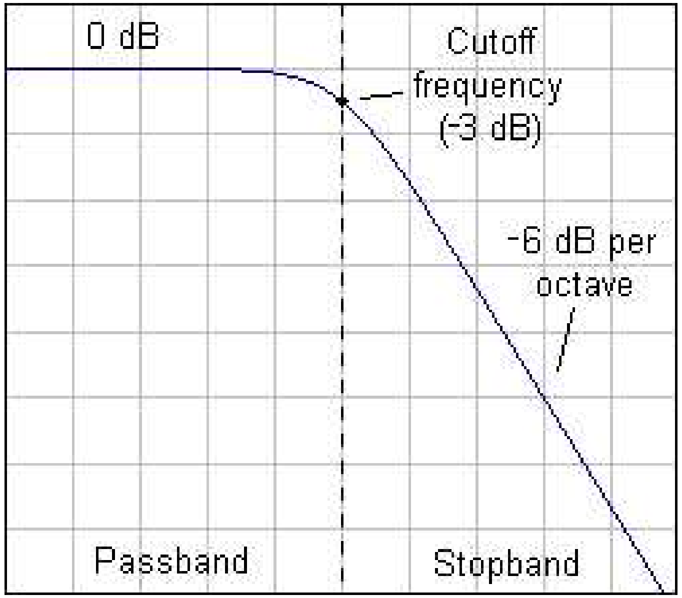
$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{z - z_0}\} = e^{-z_0 t} = e^{-\Re(z_0)t} e^{-i\Im(z_0)t}$$

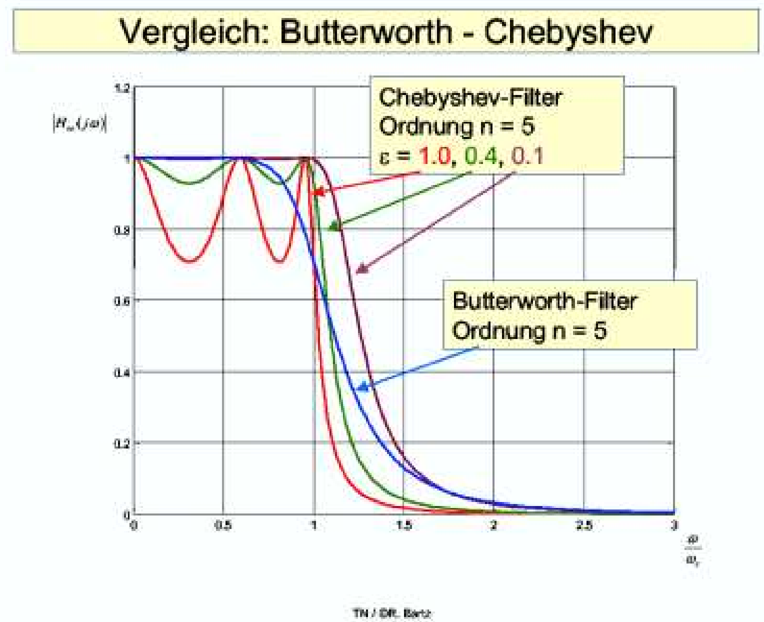
- Ein IIR kann durch die Feedbackschleife eine unendliche Impulsantwort haben.

- IIR haben gegnüber den FIR den Vorteil stärkeren Abfalls an den Cut-off-Frequenzen mit weniger Koeffizienten, aber evtl. instabil.

Digitale Filter

- Filter-Begriffe: Filterordnung, Passband, Stopband, Cutoff-(Grenz)frequenz, Rolloff, Dämpfung, Ripple, Übergangsband.





Digitale Filter: Filterdesign

- Ideale Filter können stets nur angenähert werden. Deswegen ist Filter-Design „eher eine Kunst als eine Wissenschaft“.

- Ein paar bekannte Filter:
  - Butterworth-Filter
  - Chebychev-Filter
  - Bessel-Filter
  - elliptische Filter
  - Remez Filter
  - etc.pp.